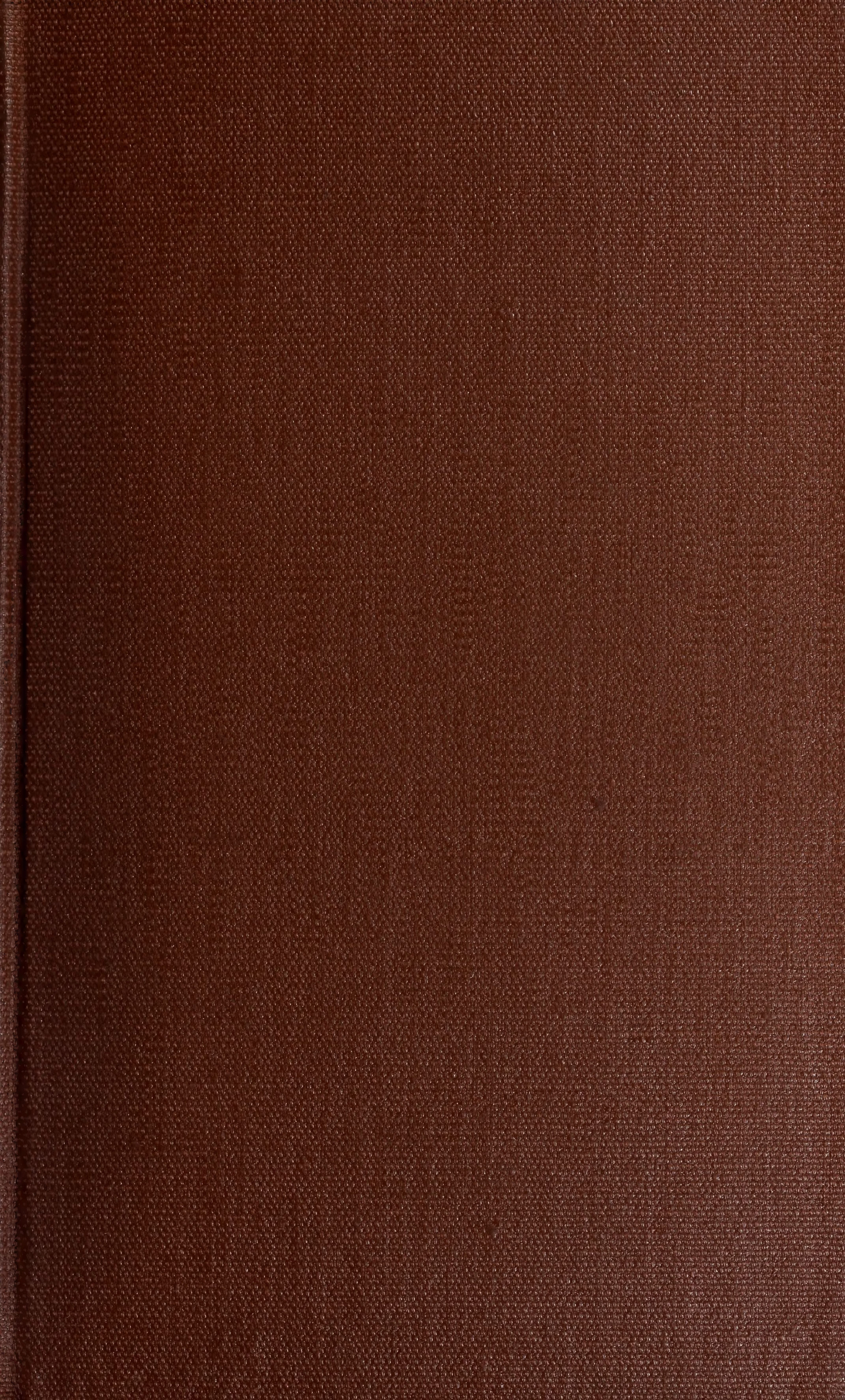


505.492

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES

EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES à HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

J. BOSSCHA,

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

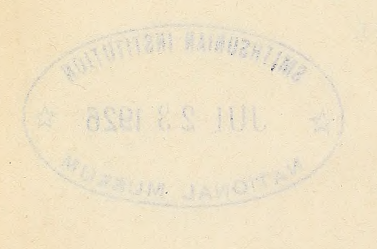
MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. K. Hoffmann et J. M. van Bemmelen.

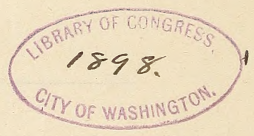
TOME XXVII.

NEW YORK
PUBLIC LIBRARY.
DUPLICATE
EXCHANGED.

HARLEM.
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1894.

11801





505.492
A67
t.27
1894

TABLE DES MATIÈRES.

PROGRAMME

DE LA

Société hollandaise des sciences, à Harlem.

ANNÉE 1893.

La SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES a tenu, le 20 mai 1893, sa cent-quarante-unième assemblée générale. Le Directeur-Président JHR. J. W. SCHORER, dans son discours d'ouverture, rendit hommage à la mémoire des membres nationaux M. DE VRIES et N. DE ROEVER, et des membres étrangers RICHARD OWEN, A. L. P. P. DECANDOLLE et A. W. HOFMANN, dont la société avait eu à déplorer la perte, dans le cours de l'année précédente. Il souhaita la bienvenue aux membres K. MARTIN et P. P. C. HOEK, qui assistaient pour la première fois à la séance.

Le Président mentionne que dans l'année écoulée, la Société a publié:

Le cinquième Volume des *Œuvres complètes de Christiaan Huygens;* le sixième Volume est en préparation et en partie déja tiré;

Les *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, Tome XXV, livr. 5 et 5 livraisons du Tome XXVI. Les deux premières livraisons du Tome XXVII, qui paraîtront ensemble, sont sous presse.

M. LAURENT, qui depuis la création de ce recueil avait assisté la Rédaction, comme traducteur, d'une façon méritoire,

s'est vu obligé, à cause de son grand âge, et au regret des directeurs, de se démettre de ses fonctions près la Société. La démission demandée lui a été accordée de la manière la plus honorable. M. Ed. Verschaffelt, doct. ès sc. à Gand, a été nommé en remplacement de M. Laurent.

Il a été donné lecture, dans la séance, des rapports émis sur quatre travaux, reçus en réponse aux questions de concours III, VI, VIII et X du programme du 1er Janvier 1893; savoir sur la question III, ainsi conçue:

Essayer l'inoculation du Viscum album sur les pruniers et les poiriers, sur les tilleuls et les peupliers, et chercher les raisons qui déterminent la préférence de ce parasite pour certaines espèces d'arbres;

par les Membres H. de Vries, W. F. R. Suringar, et N. W. P. Rauwenhoff;

sur la question VI, formulée en ces termes:

Lorsque des flacons contenant des dissolutions de produits chimiques sont laissés longtemps en repos, il s'y développe fréquemment des organismes inférieurs, d'ordinaire sous la forme de filaments, dont la présence, vu la nature de ces dissolutions, peut causer de la surprise. On demande l'étude biologique d'une ou de plusieurs espèces vivant dans ces conditions insolites, étude portant en premier lieu sur leur nutrition et sur la manière dont elles se comportent vis-à-vis des dissolutions concentrées de sels, d'acides et d'alcalis;

par les Membres M. W. Beyerinck, J M. van Bemmelen et W. F. R. Suringar;

sur la question VIII, formulée en ces termes:

Même après les expériences de M. Winogradsky et de M. Frankland, il reste encore beaucoup d'obscurité au sujet de l'oxydation que les sels ammoniacaux subissent dans la terre, et d'ou résulte leur transformation en nitrates. La Société désire que les expériences de ces deux savants soient répétées, et qu'on résolve la question de savoir si les microbes découverts par eux existent dans le sol de la Néerlande;

par les Membres M. W. Beyerinck, J. M. van Bemmelen et Th. W. Engelmann;

et sur la question X, ainsi formulée.

Dans l'ensilage des fourrages verts, il est possible d'amener et de maintenir la masse à un degré d'acidification plus ou moins élevé, ce qui donne lieu à l'ensilage *doux* et à l'ensilage *aigre*. On demande l'étude bactériologique des microbes impliqués dans ces phénomènes, et des données exactes quant aux variations, en rapport avec la température et le temps, de la proportion de sucre et du degré d'acidité;

par les Membres M. W. Beyerinck, Th. M. Gillavry et Th. W. Engelmann.

Ces divers avis avaient décidé les Directeurs à ne proposer le couronnement que du premier de ces travaux.

L'assemblée, se ralliant à cette proposition, décerna la médaille d'or à ce premier travail, envoyé sous la devise „Vidi”. L'ouverture du pli cacheté, accompagnant le mémoire, montra que l'auteur était M. Ch. F. J. Guérin, propriétaire au Mesnil-Thébault, département de la Manche, France.

La médaille d'argent fut attribuée au Membre M. Hugo de Vries, qui avait proposé la question.

Les plis accompagnant les autres travaux, écrits en allemand et en anglais, furent brûlés.

L'assemblée arrête ensuite quelques nouveaux sujets de concours, et nomme membres nationaux de la Société M. le professeur H. Kern, à Leyde, M. le professeur J. C. Kapteyn, à Groningue, et M. A. G. H. van Genderen Stort, médecin à Harlem; elle nomme membre étranger M. le prof. G. van der Mensbrugghe, à Gand.

QUESTIONS MISES AU CONCOURS.

Délai: **Jusqu'au 1er Janvier 1894.**

I. La Société demande un exposé des méthodes aujourd'hui en usage pour ennoblir les plantes d'ornement et en obtenir des variétés nouvelles; cet exposé sera appuyé, autant que possible, d'exemples décrits en détail.

II. Faire des recherches sur la situation relative des points aréolaires et des rayons médullaires dans le bois, en vue de décider jusqu'à quel point on peut regarder comme anatomiquement justifiées les questions actuellement pendantes sur le rôle des rayons médullaires dans le mouvement de l'eau dans les plantes.

III. On demande une étude anatomique comparée au sujet de l'innervation des muscles du larynx chez les mammifères.

IV. On demande une étude anatomique conparée des glandes s'ouvrant dans la cavité buccale (glandes salivaires, glandes labiales, etc.) chez les mammifères.

V. Déterminer, pour au moins trois formes animales vivant dans les eaux saumâtres de notre pays, l'influence qu'un changement des conditions biologiques a exercée tant sur les caractères extérieurs que sur la constitution interne.

VI. Elucider, par des recherches, la question de savoir si des bactéries pathogènes pour l'homme peuvent vivre et se multiplier dans les rivières de la zone tempérée, en Europe.

VII. Nonobstant le grand nombre de travaux relatifs à la chaleur de dissolution des sels (acides, bases, etc.), cette partie de la thermochimie présente encore bien des lacunes.

Pour l'application de la thermodynamique à cette classe de phénomènes, il est nécessaire de connaître la chaleur de dissolution pour des solutions beaucoup plus concentrées que celles employées jusqu'ici dans les déterminations faites sur des matières très solubles.

En outre aucun compte n'a été tenu jusqu'à présent de la possibilité de l'existence de deux sortes de solutions, saturées

par rapport à un même hydrate; enfin, dans les cas où la substance peut former plus d'un hydrate, souvent rien ne garantit que l'hydrate ayant servi aux déterminations était une matière simple.

La Société demande, en conséquence, des recherches systématiques et détaillées concernant les chaleurs de dissolution tant de sels (acides, bases) qui ne contractent pas de combinaison fixe avec l'eau, que de sels pouvant former un ou plusieurs hydrates. L'examen devrait porter aussi bien sur des matières de grande que de faible solubilité, et pour chacun des deux groupes, s'étendre des plus fortes concentrations possibles des dissolutions jusqu'aux dilutions où la limite de l'action thermique est atteinte.

La Société désirerait obtenir un résumé d'observations anciennes et nouvelles, tel que 1°. le caractère général de la ligne qui représente la chaleur de dissolution, devienne mieux connu qu'il ne l'était jusqu'à ce jour; que 2°. il en ressorte si possible, — en tenant compte de l'influence de la température — quelques conséquences relativement à la forme des lignes de solubilité; et que 3°. un pas soit peut-être fait vers une notion plus claire du phénomène de la dissolution, en rapport avec les théories sur l'union et le dédoublement de molécules dans la solution.

VIII. M. Alexejew a déterminé (Wied. Ann. 1886, Bd. XXVIII) des températures de mélange critiques pour différents mélanges de deux matières, ainsi que la composition de phases coexistantes à des températures qui se trouvent, ou bien au dessous ou bien au-dessus des températures de mélange critiques, suivant que cette température critique est une limite inférieure ou supérieure pour le mélange parfait.

La Société demande des recherches expérimentales au sujet de l'influence de la pression sur ce phénomène.

IX. F. Kaiser a montré que, dans le micromètre à double image d'Airy, il n'existe pas de proportionnalité exacte entre la distance mesurée et la valeur trouvée pour elle en tours de la vis.

Dans les exemplaires de cet instrument qui ont été construits par la maison TROUGHTON et SIMMS, les lentilles 1 et 4, comptées à partir de l'objectif, sont équi-convexes; la 2me fendue, est équi-concave; la 3me est plan-concave; et toutes les quatre sont faites de la même sorte de verre.

On demande de modifier cet instrument de telle façon que la proportionnalité en question y soit obtenue, soit en changeant la forme des lentilles, soit en employant plus d'une sorte de verre, soit par d'autres moyens.

X. Soumettre à un examen comparé et critique les différents systèmes d'algèbre géométrique (GRASSMANN, HAMILTON, MÖBIUS, CAUCHY, GIBBS), en ce qui concerne leur application à la mécanique et à la physique mathématique.

Délai: **Jusqu'au 1er Janvier 1895.**

I. La Société demande une revue des espèces de bois fossile, des feuilles fossiles et autres éléments d'origine végétale qui se rencontrent dans les tourbières des Pays-Bas. Il y sera joint des tableaux pour la détermination; et l'on notera la station ainsi que la position dans la tourbière.

II. La Société demande une étude expérimentale et critique de la manière dont se ferment les blessures chez les algues unicellulaires, les boyaux polliniques, les tubes laticifères et autres organismes unicellulaires.

III. On demande des recherches sur la nature et, si possible, la composition des substances bactéricides dans le sang et le sérum sanguin.

IV. On demande des recherches sur la structure des „corpuscules de VATER-PACINI" chez l'homme sain et l'homme malade, en particulier chez les sujets atteints d'ataxie locomotrice.

V. On demande de nouvelles recherches sur les causes qui font apparaître des ascospores chez le saccharomyces, et sur

celles des modifications histologiques, qui ont lieu à ce moment dans le protoplasme des cellules-mères sporogènes.

VI. On exposera les propriétés optiques, thermiques, et autres caractères physiques des masses gélatinisées, en particulier de la gélatine et de l'agar-agar, et on étudiera l'influence que l'addition d'autres substances exerce sur ces propriétés; de manière qu'il en résulte des données nouvelles pouvant servir à l'édification d'une théorie moléculaire de ces corps.

VII. On demande nne étude expérimentale du frottement interne des liquides.

VIII. On demande, à propos des expériences de M. V. Strouhal (Wien. Ann. Bd. 5. p. 216) une étude théorique du son musical que l'on perçoit quand un barreau cylindrique, ou une boule, se meuvent rapidement dans l'air.

IX. La Société demande une étude expérimentale du phénomène de Hall.

X. On demande une étude théorique et, au besoin, expérimentale, sur la production et les propriétés des taches noires observées par Hooke dans de minces lamelles liquides et décrites plus en détail par Fusinieri.

La Société recommande aux concurrents d'abréger autant que possible leurs mémoires, en omettant tout ce qui n'a pas un rapport direct avec les question proposée. Elle désire que la clarté soit unie à la concision, et que les propositions bien établies soient nettement distinguées de celles qui reposent sur des fondements moins solides.

Elle rappelle, en outre, qu'aucun mémoire écrit de la main de l'auteur ne sera admis au concours, et que même une médaille eût elle été adjugée, la remise n'en pourrait avoir lieu, si la main de l'auteur venait à être reconnue, entretemps, dans le travail couronné.

Les plis cachetés des mémoires non couronnés seront détruits sans avoir été ouverts, à moins que le travail présenté

ne soit qu'une copie d'ouvrages imprimés, auquel cas le nom de l'auteur sera divulgué.

Tout Membre de la Société à le droit de prendre part au concours, à condition que son mémoire, ainsi que le pli, soient marqués de la lettre L.

Le prix offert pour une réponse satisfaisante à chacune des questions proposées consiste, au choix de l'auteur, en une *médaille d'or* frappée au coin de la Société, portant le nom de l'auteur et le millésime, ou en une somme de *cent-cinquante florins;* une prime supplémentaire de *cent-cinquante florins* pourra être accordée si le mémoire en est jugé digne.

Le concurrent qui remportera le prix ne pourra faire imprimer le mémoire couronné soit séparément, soit dans quelque autre ouvrage, sans en avoir obtenu l'autorisation expresse de la Société.

Les mémoires, écrits lisiblement, en *hollandais*, *français*, *latin*, *anglais*, *italien* ou *allemand* (mais non en caractères allemands), doivent être accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom de l'auteur, et envoyés franco au secrétaire de la Société, le professeur J. Bosscha, à Harlem.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

LA COURBE DE SOLUBILITÉ

POUR LES COUPLES SALINS QUI FORMENT TANT UN SEL DOUBLE QUE DES CRISTAUX MIXTES, SPÉCIALEMENT POUR LE COUPLE SEL AMMONIAC-PERCHLORURE DE FER [1])

PAR

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM.

Lorsque deux sels sont mis, en proportions variables, en présence d'un dissolvant, il peut se produire des phénomènes multiples, qui appartiennent tous à la catégorie des équilibres de systèmes composés de trois matières. Mais, tandis que l'étude des équilibres entre deux matières est déjà assez avancée pour que les cas principaux puissent être élucidés par des exemples appropriés, l'étude des systèmes de trois matières n'en est encore qu'à sa période de début.

Le cas dont l'examen a été poussé le plus loin est celui des sels doubles (comp., à ce sujet, le Mémoire de M. Schreinemakers [2]). Récemment [3]), j'ai essayé de donner un aperçu des rapports de solubilité pour des couples de sels formant des cristaux mixtes, et j'ai pu y distinguer, par des considérations théoriques, différents cas, dont l'un a été confirmé par l'étude du couple $K\,Cl\,O_3$ et $Tl\,Cl\,O_3$.

---

[1]) Déjà communiqué à l'Académie des sciences d'Amsterdam, séance du 19 déc. 1891.

[2]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T. 9, p. 57 (1892); *Arch. néerl.*, T. 26, p. 179.

[3]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T. 8, p. 504 (1891); *Arch. néerl.*, T. 26 p. 137 et 171.

Or, M. Retgers a attiré l'attention sur le fait que, chez quelques couples de sels, il se présente encore un troisième type d'union, type intermédiaire entre les deux dont il vient d'être question; on y trouve, en effet, un sel double et, en outre, au voisinage des deux termes extrêmes, deux petites séries de mélanges isodimorphes. Dans les exemples découverts par M. Retgers: $KNO_3 + Ag\,NO_3$, $NH_4\,NO_3 + Ag\,NO_3$ [1]), $K\,Cl\,O_3 + Ag\,Cl\,O_3$ [2]), $K_2\,SO_4 + Na_2\,SO_4$ [3]), ces mélanges se produisaient toutefois en quantité si minime que l'existence n'en pouvait être constatée avec certitude que par voie microchimique. L'importance du fait signalé n'en était pas moins évidente, car, à son aide, M. Retgers put rendre compte des rapports de composition que la nature nous offre dans les séries de la dolomie [4]), du pyroxène, de l'olivine et de la pyrite [5]).

Il était donc vivement à désirer qu'une étude fût faite des relations de solubilité chez les systèmes fournissant aussi bien un sel double que des cristaux mixtes. Les systèmes ci-dessus cités ne se prêtaient pas à cette recherche, vu qu'ils sont insolubles ou que, chez ceux qui se dissolvent, l'élément accessoire n'entre qu'à l'état de faible trace. J'ai cru trouver un exemple satisfaisant dans le couple sel ammoniac-perchlorure de fer, pour lequel est bien établie, non seulement l'existence d'un sel double, mais aussi, depuis les recherches de M. Lehmann [6]), celle de cristaux mixtes. L'examen de ce couple présentait d'autant plus d'intérêt que l'une des deux substances se produit à l'état anhydre, l'autre à l'état hydraté, et qu'elles cristallisent dans des systèmes différents. L'étude de ce qui cristallise simultanément: sel ammoniac avec chlo-

---

[1]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T.4, p.611 (1889).
[2]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T.5, p.446 (1890).
[3]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T.6, p.226 (1890).
[4]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T.6, p.227 (1890).
[5]) *Ann. Ecole polyt. de Delft*, T. 6, p. 186 (1891).
[6]) *Zeitschr. f. Krystall.*, T. 8, p. 438 (1883).

rure ferrique anhydre ou hydraté ou avec sel double, promettait de mieux préciser nos notions sur l'aptitude à former des cristaux mixtes et sur ses rapports avec l'isomorphisme.

J'ai déjà fait voir, dans mon Mémoire antérieur [1]), de quelle utilité peuvent être les déterminations de solubilité pour l'étude de ces cas d'isomorphie douteuse.

A température et pression constantes, un sel double aussi bien que des cristaux mixtes peuvent en effet exister, chacun séparément, à côté de toute une série de dissolutions, dont la composition varie d'une manière continue. Une composition unique, au contraire, est possible en présence simultanée soit du sel double et d'un de ses constituants, soit de deux sels doubles, soit de deux sortes de cristaux mixtes, soit enfin d'un sel double et de cristaux mixtes. Cette conséquence de la règle des phases de Gibbs s'étant jusqu'ici vérifiée dans tous les exemples bien étudiés, il était à présumer qu'elle subsisterait aussi pour le dernier cas mentionné, qui n'avait pas encore été l'objet de recherches spéciales.

Comme un sel double possède toujours la même composition, tandis que les cristaux mixtes présentent une composition variable suivant la proportion des deux éléments dans la solution, l'étude systématique des courbes de solubilité et des cristaux déposés de solutions successives devait décider s'il se formait du sel double, ou bien des cristaux mixtes soit des deux composants soit du sel double avec l'un des composants, ou bien encore plusieurs de ces types de combinaison. En conséquence, j'ai cherché à déterminer la courbe de solubilité du couple sel ammoniac-chlorure ferrique à 15°.

2. Sel ammoniac et chlorure ferrique.

C'est en 1839 que Fritsche [2]) fit connaître le sel double $4\,NH_4Cl\,.\,Fe_2Cl_6\;2\,H_2O$. Il l'obtint, — à l'état de cristaux rhombiques, rouge grenat, ayant à peu près la forme d'octaèdres, —

[1]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T. 8, p. 514 (1891); *Arch néerl.*, T. 26, p. 150.

[2]) *Journal f prakt. Chem.*, T. 18, p. 485 (1839)

de solutions de sel ammoniac très riches en fer; mais il n'indique pas d'une manière plus précise la composition que la solution doit avoir. Quant à la composition des cristaux, toutefois, l'analyse ne laisse aucun doute.

Déjà dès le quinzième siècle (Basile Valentin), on connaissait, comme sel ammoniac martial, une préparation qui, obtenue soit par sublimation, soit par cristallisation, présentait une proportion de fer très variable. Geiger [1]) et Winkler [2]) firent quelques recherches sur la teneur en fer des cristaux fournis par des solutions de composition connue, afin d'arriver ainsi à l'obtention d'un produit de composition plus constante. Ils constatèrent que l'aptitude à cristalliser du sel ammoniac est notablement accrue par la présence du fer, de sorte que, au lieu des groupements en barbes de plumes, que donne le sel ammoniac pur, il se forme des cubes isolés [3]). M. Lehmann [4]) les reconnut pour des cristaux mixtes, dans lesquels, en cas de production suffisamment lente, le fer était réparti uniformément.

Après avoir fait quelques expériences préliminaires, d'où il ressortit à quels degrés de concentration de la dissolution il se déposait du sel double ou des cristaux mixtes, je préparai une série étendue de liquides contenant des proportions différentes tant de sel ammoniac que de chlorure ferrique; ces liquides étaient obtenus en dissolvant du sel ammoniac pur avec du perchlorure de fer du commerce, recristallisé à différentes reprises et possédant alors, comme on sait, assez exactement la composition $Fe_2\,Cl_6\,.\,12\,H_2O$. Tantôt je laissais ces solutions déposer librement des cristaux, tantôt j'y semais l'hydrate ci-dessus, le sel double ou un cristal mixte, et j'abandonnais alors le liquide à lui-même pendant plusieurs jours, à la température de 15°.

---

[1]) *Repertor. f, d. Pharmacie*, T. 13, p. 422 (1822.)

[2]) *Repertor. f. d Pharmacie*, T. 67, p. 155 (1839).

[3]) Voir aussi, à ce sujet, Retgers, *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T. 9, p. 314 (1892).

[4]) *Molecularphysik*, T. I, p. 427.

L'analyse, tant de la solution que des cristaux qui étaient en équilibre avec elle à 15°, avait lieu de la manière suivante. Un poids déterminé était étendu d'eau; dans une portion mesurée de cette solution le chlorure ferrique était précipité et pesé à l'état de $Fe_2\,O_3$, dans une autre portion le chlore total était titré selon la méthode de Volhardt, par la solution argentique au dixième. [1])

Les résultats obtenus sout consignés dans le tableau suivant (voir page 6):

Les valeurs qui expriment la composition des dissolutions sont représentées graphiquenent dans la fig. 1, où les abscisses correspondent aux proportions du sel ammoniac, les ordonnées à celles du chlorure ferrique, les unes et les autres en molécules ($NH_4\,Cl$ et $Fe\,Cl_3$) sur 100 molécules d'eau dans la dissolution. L'isotherme à 15° est donc composée de trois courbes *AB*, *BCE* et *CD*, qui se coupent à angle vif en *B* et *C*.

La petite courbe *AB* représente les solutions qui peuvent être en équilibre avec $Fe_2\,Cl_6\,.\,12\,H_2O$. L'addition de sel ammoniac fait monter la solubilité de cet hydrate de 9,30 à 9,93 molécules. Mais, aussitôt que la proportion de sel am-

---

[1]) Cette méthode m'a fourni des résultats très exacts, appliquée comme il suit. La solution des chlorures étant additionnée d'acide nitrique et de $0^{cc},2$ de rhodanure d'ammonium, il y était ajouté de la solution argentique jusqu'à ce que la couleur rougeâtre eût nettement passé au blanc pur. Cela demande rarement plus de $0^{cc},5$ d'excès; on titre alors en retour avec la solution de rhodanure au dixième, après avoir préalablement fait déposer le *Ag Cl* par une agitation rapide durant 1—2 minutes. Cette dernière opération doit être répétée après l'addition de chaque dixième de centimètre cube de solution de rhodanure; le titrage est continué jusqu'à ce qu'une goutte produise distinctement une coloration rougeâtre dans le liquide clair qui se trouve au-dessus de *Ag Cl.* De cette façon, on peut réellement être sûr de l'exactitude du résultat à une seule goutte près, attendu que le rhodanure de fer se transforme assez rapidement avec le *Ag Cl* suspendu en poudre legère, tandis qu'il ne le fait avec le dépôt granuleux que moyennant une agitation prolongée.

Numéro de l'analyse.	Teneur de la dissolution.				Nature des cristaux.
	sur 100 parties d'eau.		sur 100 molécules d'eau.		
	$H_4N\,Cl$	$Fe\,Cl_3$	$H_4N\,Cl$	$Fe\,Cl_3$	
	parties.		molécules		
1	0	83.88	0	9.30	$Fe_2Cl_6\ 12\ H_2O$
2	3.24	86.32	1.09	9.57	„ „
3	4.03	91.61	1.36	9.93	„ + sel double
4	5.92	83.64	2.00	9.27	Sel double
5	8.31	78.77	2,79	8.71	„ „
6	9.21	77.54	3.11	8.60	„ „
7	12.08	73.20	4.05	8.09	„ „
8	15.53	69.01	5.22	7.65	„ „
9	19.12	64.83	6.41	7.18	„ „
10	22.88	61.28	7.70	6.79	„ „
11	32.04	56.00	10.78	6.21	„ „
12	23.21	60.83	7.82	6.75	Cristaux mixtes, contenant en chlorure ferrique: 7.29 %
13	23.05	59.90	7.76	6.64	7.10 „
14	22.63	53.47	7.62	5.94	5.55 „
15	22.85	49.30	7.69	5.71	5.00 „
16	22.90	45.42	7.70	5.03	4.40 „
17	23.00	42.92	7.74	4.76	2.25 „
18	23.23	39.13	7.81	4.34	3.80 „
19	23.05	34.56	7.76	3.83	3.06 „
20	25.33	25.43	8.52	2.82	1.64 „
21	28.41	15.33	9.60	1.70	0.94 „
22	32.55	6.15	10.95	0.68	0.31 „
23	35.30[1]	0	11.88	0	$H_4\,N\,Cl$

[1]) D'après Alluard, *Ann. Chem. Pharm.*, T. 133. p. 292, la solubilité est à 10°: 32,84, à 20°: 37,28.

moniac dans la dissolution dépasse 1,36 molécules, le chlorure ferrique se transforme en sel double.

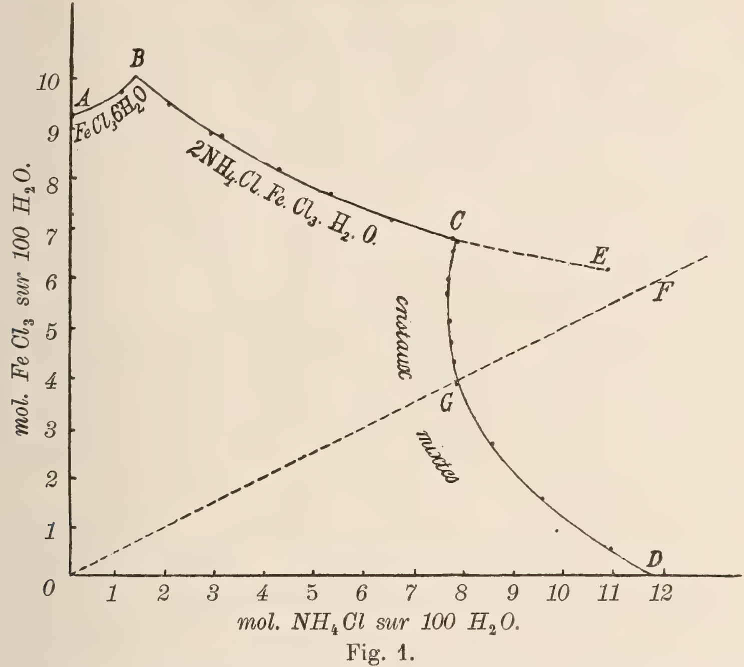


Fig. 1.

Le sel double, à son tour, peut exister en présence d'une série de dissolutions dont la composition varie depuis *B* jusqu'en *C*. Fait-on dissoudre un peu plus de sel ammoniac et de chlorure ferrique que ne le comporte l'un des points de cette courbe, par exemple en chauffant, alors un peu de sel double se sépare à 15°. C'est de cette manière qu'ont été exécutées quelques-unes des déterminations 5—11. Pour d'autres, après que la direction générale de la courbe eut été reconnue, on prépara une dissolution qui correspondait à peu près à un certain point, puis cette dissolution fut secouée avec du sel double pour établir l'équilibre exact. La droite *OF*, tracée dans la figure, indique les points qui présentent le rapport $\frac{NH_4Cl}{FeCl_3} = 2$, c'est-à-dire le même rapport qui existe dans le sel double:

$$2NH_4Cl.FeCl_3.H_2O.$$

Cette composition, donnée par Fritsche, s'est trouvée vérifiée dans mes expériences. Les cristaux déposés lors des déterminations 4, 8, 9 ont donné à l'analyse, pour le rapport: $\frac{\text{équiv. } Cl \text{ dans le chlor. ferrique}}{\text{équiv. } Cl \text{ dans le sel ammoniac}}$, les valeurs: $\frac{3{,}008}{2}$, $\frac{3{,}03}{2}$, $\frac{3{,}08}{2}$.

Ces nombres montrent, en outre, que les dissolutions correspondant à la courbe *BC* laissent toujours déposer du sel double pur, et non pas quelque mélange avec l'un des composants. Pour la teneur en eau du sel double, il a été trouvé par Fritsche, dans deux analyses, 1,1 et 1,4, par moi: 1,21—1,36. La très grande hygroscopicité du sel double rend presque impossible une concordance plus exacte, d'autant plus que la détermination directe de l'eau est impraticable, le sel ammoniac se volatilisant avant que toute l'eau ait été chassée. La teneur en eau doit donc être déduite de la différence avec le poids primitif.

La proportion du fer dans la dissolution ne peut tomber au-dessous de celle qui correspond au point *C* sans qu'un second changement ne se produise. Au lieu de sel double, la solution dépose alors des cristaux mixtes, et si du sel double s'y trouvait déjà, il se transforme en cristaux mixtes. Ce dépôt ou cette transformation peut toutefois tarder un peu à se produire; d'où il résulte qu'une partie de la courbe *BC* se laisse encore réaliser au-delà du point *C*. Mais, plus la composition de la dissolution s'éloigne du point *C*, plus l'état devient instable.

L'analyse 11 est relative à un pareil point *E*. La solution, qui avait été formée à chaud, au moyen de quantités calculées de $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$, NH_4Cl et H_2O, fut refroidie jusqu'à 15° et secouée pendant $\frac{1}{4}$ d'heure avec un grand excès de sel double, de sorte que l'établissement de l'équilibre était probable. Après la prise d'essai, le dépôt de cristaux mixtes commença tout de suite.

Si la courbe *BC* se prolongeait encore davantage, elle couperait la droite *OF* en quelque point *F*. Ce point d'intersection indiquerait alors la composition de la solution pure et sa-

turée du sel double. Une pareille solution est donc instable. Aussi ai-je observé que lorsqu'on cherche à la réaliser au moyen du sel double et d'eau, la solution, avant même que le point de saturation soit atteint, laisse déposer une quantité considérable de cristaux mixtes [1]). Sa teneur est alors abaissée jusqu'à un point de la courbe *CD*, courbe qui représente les différentes solutions pouvant exister en équilibre avec des cristaux mixtes.

L'assertion de M. Fritsche, que le sel double n'est pas décomposé par l'eau, comme l'est le sel double analogue du potassium, doit donc être corrigée en ce sens qu'il est dissous par des quantités d'eau suffisantes, mais décomposé par des quantités moindres, de telle sorte, toutefois, qu'il ne se dépose pas du sel ammoniac, mais des cristaux mixtes ferrugineux.

La démarcation entre ces quantités d'eau est donnée par le point *G*. Toutes les solutions comprises entre *O* et *G* sont stables; toutes celles qui se trouvent entre *G* et *F* doivent déposer des cristaux mixtes et ne peuvent donc être obtenues, tout au plus, que pendant un temps très court, à l'état instable.

La réalisation du prolongement *CE* de la courbe *BC* fait nettement ressortir le changement brusque de direction que l'isotherme subit en *C*.

Aussi, bien que la teneur de la solution n° 12 ne différât que très peu de celle du n° 10, cette dissolution 12, préparée à chaud puis ensemencée à 15° de sel double, laissa déposer, au bout de quelques heures, non pas du sel double, mais des cristaux mixtes contenant 7,3 % de chlorure ferrique, tandis

---

1) En conséquence, pour préparer le sel double, il faut toujours partir d'une solution contenant un excès de chlorure ferrique. Par suite de la solubilité beaucoup plus grande à température supérieure, cette préparation est assez facile On peut, en partant d'un point de *BC*, faire dissoudre du NH_4Cl et du Fe_2Cl_6 en quantité supplémentaire assez grande pour que, par refroidissement à 15°, la quantité voulue du sel double se dépose. Si, par exemple, on dissout 100 gr H_4NCl et 300 gr $Fe_2Cl_6 . 12\, H_2O$ dans 75 gr d'eau, il se déposera, à 15°, environ 150 gr de sel double.

que le sel double renferme 56,5 % de ce chlorure (anhydre). Dans les déterminations 12—22, il fut toujours procédé de façon que, de $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ litre de solution, il ne se déposât à 15° que 1 à 2 gr. de cristaux; et ceux-ci furent secoués durant au moins deux jours avec leur solution, afin qu'il s'établît un équilibre aussi parfait que possible. La composition de la solution n'était que très peu changée par le dépôt, ce qui est nécessaire pour l'obtention de cristaux mixtes homogènes [1]).

Par la courbe de la fig. 2, j'ai essayé de représenter la relation entre la teneur en fer des cristaux mixtes et celle de la dissolution.

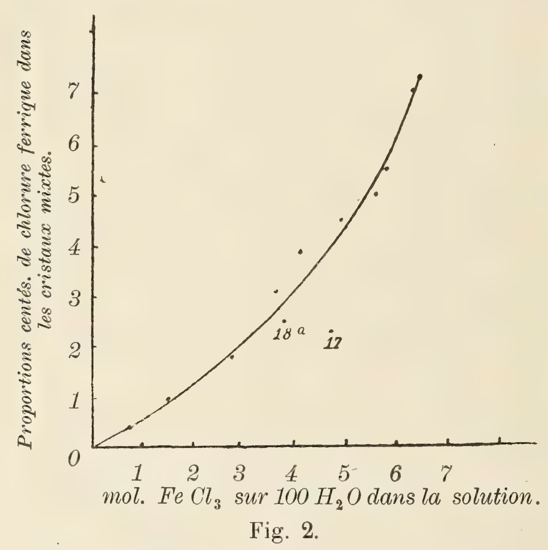


Fig. 2.

Les résultats des déterminations particulières, sauf celui du n°17, tombent presque tous très près de la courbe continue, et il semblerait d'après cela que cette courbe pût exprimer la relation entre le fer du mélange liquide et celui du mélange solide pour toute l'étendue dans laquelle se produisent des cristaux mixtes, tandis que la situation singulière du point 17 devrait être attribuée à une erreur expérimentale.

Quelques observations, dont je n'ai pu trouver l'explication, exhortent toutefois à une grande prudence. C'est ainsi que,

[1]) Les données de Geiger et de Winkler (rapportées aussi dans le *Handbuch* de Gmelin) sur la teneur en fer des cristaux, comparée á celle de la solution, n'ont aucune valeur, vu qu'il n'a pas été tenu compte de cette circonstance et que, en outre, les dépositions ont eu lieu à température décroissante.

en essayant de préparer une solution pure et saturée du sel double, j'ai obtenu des cristaux mixtes à 2,5 % $Fe_2\ Cl_6$. L'eau-mère ne fut pas analysée, mais, vu son mode de préparation, elle doit nécessairement avoir contenu à très peu près 2 $NH_4 Cl$ sur $Fe\ Cl_3$, et par conséquent avoir correspondu au point *G*. Elle se place donc entre les solutions 18 et 19. Je la désignerai par 18*a*. Le résultat de cette expérience, lui aussi, s'éloignerait assez notablement de la courbe.

Les résultats deviennent toutefois encore beaucoup plus incertains lorsqu'on tient compte, en outre, de la composition des cristaux mixtes qui se déposent successivement de la même solution. A cet égard, je puis communiquer le tableau suivant:

Proportion centésimale de chlorure ferrique
dans les dépôts successifs

n° 18*a*.	n° 15.	n° 16.	n° 18.	n° 17.	n° 20.	n° 21.	n° 22.
2,5	5,00	4,40	3,80	2,25	1,64	0,94	0,31
1,9	3,68	3,14	2,80	2,80	0,90	0,24	0,21
1,6	2,95	2,53	2,01	1,77	1,23	0,26	0,12
	3,77	3,30	2,95	2,23		0,44	
	3,07	2,77	1,91				

Dans l'expérience 18*a*, les trois dépôts ont été obtenus l'un après l'autre, pendant que s'établissait l'équilibre de saturation. Pour les n^os^ 15, 16, 18, la solution était additionnée, après chaque cristallisation, d'environ 2 gr. de sel ammoniac, qu'on faisait dissoudre en chauffant légèrement dans un matras fermé, après quoi le liquide était abandonné à lui-même, à la température de 15°. Au bout de quelque temps, le sel ammoniac ajouté se trouvait alors de nouveau séparé, à l'état de cristaux mixtes. Par cette séparation, la solution perdait d'ailleurs si peu de $Fe\ Cl_3$ que sa composition ne pouvait être devenue

sensiblement différente de celle indiquée dans le tableau antérieur.

Le second dépôt du n° 17 a également été obtenu par dissolution de sel ammoniac dans la solution précédente; mais les cristaux suivants, et de même toutes les cristallisations des n^{os} 20, 21, 22, sauf la première, se produisirent par évaporation spontanée de la solution en vase ouvert, à 15°. Le rapport $\frac{Fe\,Cl_3}{NH_4\,Cl}$ étant beaucoup plus petit pour les cristaux que pour la solution, cette dernière méthode ferait croître peu à peu la teneur en fer du liquide.

Néanmoins, la teneur en fer des cristaux diminue d'abord dans les cristallisations successives, pour augmenter plus tard dans quelques-unes d'entre elles. La même inégalité s'est manifestée dans les autres séries d'expériences.

Je n'ai encore aucune raison à donner de ce singulier résultat. Aussi longtemps, toutefois, qu'on n'aura pas expliqué pourquoi les premières cristallisations sont presque toujours les plus riches en fer, il restera incertain si ce sont bien celles-ci qui doivent être regardées comme se trouvant en équilibre définitif avec la solution correspondante.

Toute spéculation ultérieure, sur les relations numériques entre la teneur en fer de la solution et celle des cristaux mixtes, serait donc prématurée.

Il reste maintenant encore deux questions à résoudre: quel est l'élément associé au sel ammoniac dans les cristaux mixtes, et cette association constitue-t-elle un cas d'isomorphisme?

M. Lehmann [1]), considérant la similitude du dichroïsme chez les cristaux mixtes et le sel double, en infère que c'est précisément cette combinaison double qui cristallise conjointement avec le sel ammoniac. Cette présomption n'est pas confirmée par les recherches dont il est rendu compte ici.

---

[1]) *Molecularphysik.* T. I, p. 428.

D'abord, il serait tout à fait improbable que, si un pareil mélange avait lieu, le mélange inverse fût exclu. Or, tel serait le cas, puisque la courbe BC, du commencement jusqu'à la fin, ne se rapporte qu'au sel double pur, qui en C se transforme brusquement en cristaux mixtes à 7,3 % $Fe\,Cl_3$. S'il y avait miscibilité, on devrait s'attendre à ce que dans les cristaux la proportion de sel ammoniac augmentât déjà, fût-ce à un faible degré, de B à C, pour, en ce dernier point, s'élever subitement. L'hypothèse en question est d'ailleurs contredite par la détermination de la proportion d'eau des cristaux mixtes (voir plus bas).

Il ne s'agit pas non plus d'un cas analogue aux exemples, étudiés par M. Retgers, d'un sel double existant isolément à côté d'un mélange isodimorphe des deux éléments. A la courbe AB n'appartiennent que des cristaux de $Fe_2\,Cl_6\,.\,12\,H_2\,O$ pur. L'examen microchimique des cristaux jaunes de l'expérience n°. 3, lesquels étaient restés plus de quatre mois, à des températures variables, à côté du sel double dans la solution, ne put y faire découvrir, par le chlorure platinique, la présence de sel ammoniac.

Cette circonstance rend improbable, inversement, que dans les cristaux mixtes qui appartiennent à la courbe CD le $Fe_2\,Cl_6\,.\,12 H_2\,O$ soit l élément accessoire.

Pour décider autant que possible cette question, j'ai cherché à déterminer s'il y avait de l'eau dans les cristaux mixtes, et en quelle quantité. A cet effet, je choisis des cristaux mixtes riches en chlorure ferrique, vu que dans ceux-là la proportion d'eau, rapportée au poids des cristaux, devait être au maximum. Afin de rendre ausi petite que possible l'erreur de la détermination indirecte, les solutions des cristaux furent divisées par pesée en deux parts, destinés respectivement au dosage du fer comme $F_2\,O_3$ et du chlore par voie de titrage.

Voici les chiffres trouvées:

Poids des cristaux.	$FeCl_3$	NH_4Cl	H_2O	moléc. $FeCl_3$	moléc. H_2O	Rapport.
1070 mg,0	78,0	956,4	35,6	0,48	1,98	1 : 4,1
2601 ,3	160,9	2369,6	70,8	0,991	3,93	1 : 3,97

Pour une teneur en chlorure ferrique de 7,29 et de 6,19 %, cet élément existerait donc dans les cristaux à l'état de $Fe\,Cl_3 \,.\, 4H_2O$ ou de $Fe_2\ Cl_6 \,.\, 8H_2O$. Mais un pareil hydrate n'est pas connu. L'étude systématique du rapport entre le chlorure ferrique et l'eau m'a appris [1]) que la série des hydrates est:

$Fe_2\ Cl_6$ uni à: $12H_2O$, $7H_2O$, $5H_2O$, $4H_2O$.

A 15°, le premier de ces hydrates est le seul qui soit stable en présence de la dissolution pure. L'addition de corps étrangers peut toutefois déplacer la limite de stabilité, et le cas ordinaire sera l'abaissement de cette limite. Or, pour $Fe_2\ Cl_6 \,.\, 7\ H_2O$, la limite inférieure de la stabilité se trouve à 25°. En raison de la teneur en sel ammoniac de la solution, cette limite aurait donc pu être abaissée peut-être jusqu'à 15°, ou même plus bas, d'où la possibilité que cet hydrate serait entré dans les cristaux mixtes.

La détermination de l'eau conduit, il est vrai, à $8\ H_2O$; mais une incertitude de $1\ H_2O$ dans ce dosage indirect n'est pas tout à fait impossible [2]).

Même en admettant ce résultat, il s'en faut encore de

---

[1]) Voir un Mémoire qui fera suite à celui-ci.

[2]) Dans l'analyse de 1gr de matière, 1 mol. H_2O sur $Fe_2\ Cl_6$ ne correspond qu'à environ 4mg, dans l'analyse de 2gr à environ 8mg. Or, les cristaux mixtes riches en fer étant encore un peu hygroscopiques, et le titre de la solution argentique, aussi bien que le titrage, comportant une légère inexactitude, toutes ces petites erreurs viennent à la charge de la teneur en eau. Une petite inexactitude dans le dosage du fer est presque sans influence, vu que $\frac{FeCl_3}{3} = 54,\ 1$ et $NH_4Cl = 53{,}5$. Quant à l'erreur provenant du titre et du titrage, je ne l'estime pas à plus de 1 mg,5; l'hygroscopicité exercerait donc l'influence la plus forte.

beaucoup que la vraie nature des cristaux mixtes soit élucidée. L'hydrate $Fe_2\ Cl_6 . 7\ H_2O$ est monocline et présente à un haut degré, en lumière polarisée, les phénomènes que M. Lehmann a décrits pour les cristaux mixtes (*Lehrbuch*, T. I, p. 427), spécialement un très fort dichroïsme. L'idée se présentait donc naturellement d'admettre une interposition de cette substance biréfringente entre les particules régulières du sel ammoniac, comme M. Lehmann d'abord et M. Retgers dans son dernier Mémoire [1]) l'avaient proposé, sans avoir une connaissance exacte de l'élément accessoire des cristaux.

D'après cette manière de voir, ces cristaux mixtes constitueraient une catégorie particulière, qui n'aurait rien à faire avec l'isomorphisme.

Mais il y a aussi des observations qui font encore paraître prématurée une semblable conclusion. Toutes les cristallisations que j'obtins dans mes déterminations de la solubilité furent examinées au microscope. Or, presque tous ces cristaux, que la proportion du fer y fût grande ou petite, présentaient la réfraction simple. La biréfringence n'était qu'une rare exception. Je rappellerai que tous ces cristaux s'étaient formés très lentement, à 15°.

Les éléments sont-ils, au contraire, rapprochés sous le microscope, on obtient presque invariablement des cristaux mixtes plus ou moins biréfringents. Lorsque, toutefois, ces cristaux sont laissés pendant longtemps à la température ordinaire, soit secs, soit recouverts de leur eau-mère, ils perdent peu à peu la biréfringence, et au bout de quelques jours celle-ci cesse d'être perceptible. Leur transparence n'en est que peu altérée. Les cristaux sont-ils chauffés, la biréfringence disparaît très rapidement. Ces faits, que M. Lehmann et M. Retgers paraissent n'avoir pas connus, ne se laisseraient que très difficilement concilier avec l'hypothèse de l'interposition d'un hydrate de chlorure ferrique biréfringent. Il faudrait se représen-

[1]) *Zeitschr. f. phys. Chem.*, T. 9, p. 385 (1892).

ter que, en cas de chauffage et de refroidissement subséquent, les cristaux interposés commenceraient par se fondre [1]), puis se reformeraient entre les particules de sel ammoniac, mais avec une orientation si irrégulière que le caractère biréfringent du cristal mixte total serait effacé. Pour la transformation analogue à la température ordinaire, elle resterait sans explication.

On pourrait, au contraire, se rendre très simplement compte de ces faits en admettant que les anomalies optiques sont dues à des tensions internes. M. Lehmann a émis l'opinion que la double réfraction pourrait être attribuée, au moins en partie, à une pareille cause. M. Retgers partage cet avis, tout en déclarant très catégoriquement que l'anomalie optique est beaucoup trop forte pour se laisser expliquer par la tension seule. A cela, toutefois, on peut opposer l'observation que, sous le microscope, il se forme parfois des cristaux mixtes dont les quatre secteurs ne se rencontrent pas en un même point, mais aboutissent aux angles d'un quadrilatère, et qu'alors la substance de ce quadrilatère se montre isotrope. Or, il est presque inconcevable que, si les cristaux mixtes tenaient interposé un hydrate anisotrope biaxe, celui-ci, dans le champ central, serait précisément orienté de telle façon que les rayons lumineux le traversent suivant la direction d'un de ses axes optiques.

Si, pour échapper à ces difficultés, on voulait admettre que lors de l'équilibre définitif des cristaux mixtes l'hydrate de chlorure ferrique s'y trouve comme élément isotrope, il faudrait, on bien qu'il existât encore une modification isotrope de $Fe_2 Cl_6 . 7\, H_2 O$, non connue jusqu'ici à l'état libre, ou bien qu'il pût exister une combinaison régulière de $Fe_2\, Cl_6$ avec $8\, H_2 O$, combinaison qui, elle non plus, n'a pas encore été obtenue.

La biréfringence des cristaux mixtes initiaux serait alors à expliquer soit (dans le dernier cas) par une tension intérieure,

[1]) Point de fusion de $Fe_2\, Cl_6 . 7\, H_2 O$: 32°,5.

soit (dans le premier cas) en admettant que le $Fe_2\ Cl_6 . 7\ H_2O$ se produit d'abord sous la forme monocline, puis, au bout de quelque temps, sous la modification régulière.

Ces observations sur le caractère optique des cristaux, ainsi que les considérations qui s'y rattachent, m'ont été communiquées par M. le Dr Schroeder van der Kolk, assistant au Cabinet minéralogique de l'université de Leiden, qui a bien voulu s'intéresser à ces questions.

S'il subsiste donc encore quelque incertitude au sujet de la vraie nature des cristaux mixtes, l'ensemble des phénomènes d'équilibre est parfaitement mis en lumière par les recherches qui précèdent.

L'isotherme de 15° est composée de trois courbes, qui se coupent deux à deux. La courbe moyenne appartient au sel double. Une série de solutions différentes, avec lesquelles ce sel double peut être en équilibre, a été étudiée ici, pour la première fois, d'une manière un peu précise. La teneur en fer diminue assez régulièrement à mesure qu'augmente la proportion de sel ammoniac. Si l'on désigne par a le nombre des molécules $NH_4\ Cl$, par b celui des molécules $Fe\ Cl_3$, il suit des expériences 3 à 10 qu'on a assez exactement:

$$\tfrac{1}{2}\,a + b = \text{constante} = \text{env. } 10{,}3.$$

Ensuite, une molécule $NH_4\ Cl$ chasse approximativement une molécule $Fe_2\ Cl_6$ de la solution. Ce n'est là, toutefois, qu'une règle empirique. La loi de l'équilibre entre le sel double et la solution ne saurait être discutée sans plus ample connaissance de la quantité des molécules et de leurs produits de décomposition dans la solution.

La première courbe AB représente les solutions qui peuvent être en équilibre avec l'hydrate stable à 15° de l'un des composants ($Fe_2\ Cl_6$) du sel double, et pour une concentration déterminée elle se rattache à la seconde courbe. La solution qui correspond à ce point B peut donc, à 15°, coexister aussi bien avec $Fe_2\ Cl_6 . 12\ H_2O$ qu'avec le sel double. Tout cela

est parfaitement analogue à la manière dont se comportent les autres sels doubles étudiés jusqu'ici.

La troisième courbe, au contraire, — qui, pour un couple salin ne pouvant fournir que du sel double, pas de cristaux mixtes, correspondrait au second composant ou à son hydrate stable à 15°, — donne ici la série des solutions qui peuvent être en équilibre avec des cristaux mixtes dont la composition varie, de *C* en *D*, depuis une teneur maxima en chlorure ferrique jusqu'au sel ammoniac pur. A côté de la solution du point *B* peuvent exister aussi bien le sel double que les cristaux mixtes contenant la proportion maxima de chlorure ferrique.

A une température plus haute ou plus basse, la situation des trois courbes et de leurs points d'intersection deviendra différente [1]). Si l'on ordonnait toutes ces courbes dans l'espace, suivant un axe des températures, elles conduiraient à une figure analogue à celle par laquelle M. Schreinemakers [2]) a dernièrement représenté la relation du couple salin KI et PbJ_2 vis-à-vis de l'eau. La signification de la surface I et de la courbe *BB* de cette figure serait naturellement différente, en ce sens qu'elles représenteraient, dans le cas actuel, des solutions en équilibre avec des cristaux mixtes de composition variable. Cette composition ne trouve pas d'expression dans la figure. On pourrait remédier à ce défaut en unissant par des courbes, sur la surface I, les points qui correspondent à des cristaux mixtes de même composition. En même temps serait alors exprimée la manière dont la teneur maxima des cristaux mixtes qui appartiennent à la courbe *BB* (figure de M. Schreinemakers) varie avec la température.

---

[1]) C'est ce qu'indique déjà l'observation suivante. La solution n° 13, qui à 15° avait fourni des cristaux mixtes, déposa ensuite, à 0°, du sel double. Il s'ensuit que, à température inférieure, le point *C* est déplacé vers le côté des petites teneurs en fer.

[2]) *Zeitschr. f. phys. Chem.*, T. 9, p. 74 (1892); *Arch. néerl.*, T. 26, p. 205.

De nouvelles recherches, faites à des températures plus hautes et plus basses, sont très désirables après que l'analyse a fait voir que les cristaux mixtes ne contienneut pas $Fe_2 Cl_6$, mais un hydrate à environ 8 H_2O.

Tant à température croissante que décroissante, il doit donc nécessairement y avoir, aussi dans les solutions contenant du sel ammoniac, une limite, au-delà de laquelle ne peuvent se déposer ni cet hydrate ni des cristaux mixtes. On est alors conduit à se demander si, au-delà de cette limite, le sel ammoniac pur reparaît comme phase solide, ou si de nouveaux cristaux mixtes, avec un autre état d'hydratation du chlorure ferrique, deviennent possibles. [1])

Dans l'un et l'autre cas, la surface II et la courbe *BB* subiront un changement de direction. Mais il serait du plus haut intérêt de décider quel cas se produira, pour trancher la question de savoir si le mélange implique l'isomorphisme, ou non, question que j'ai dû laisser sans réponse.

3. Isothermes de solubilité pour les couples salins de différents types d'association.

Nous sommes maintenant à même d'indiquer en général la forme de l'isotherme de solubilité pour les différents types d'association que des couples de sels [2]) peuvent présenter. En prenant de nouveau pour abscisse la proportion de l'un des éléments dans la dissolution saturée, pour ordonnée la proportion de l'autre élément, nous obtenons d'abord sur chaque

---

[1]) Peut-être faut-il expliquer de cette manière l'observation de M. Genth (*Journ. f. prakt. Chem.*, T. 71, p. 165), qu'à 25°—40° les cristaux du sel double se transforment en cristaux aciculaires d'un jaune orangé

[2]) Cette expression est employée ici, uniquement à cause de sa simplicité, pour tous les systèmes de deux corps solides.

axe un point qui représente, pour la température dont il s'agit, la composition de la solution saturée de l'un ou de l'autre élément ou de son hydrate stable.

Ces deux points seront maintenant reliés l'un à l'autre par une ou plusieurs courbes, suivant le type d'association du système. Nous pouvons distinguer les cas suivants:

Cas 1. Les sels ne forment ni sel double ni cristaux mixtes. Les deux points extrêmes sont unis par deux courbes, se coupant en un point correspondant à la solution qui peut être en équilibre avec les deux éléments.

Cas 2. Les sels forment une série continue de cristaux mixtes. Les deux points extrêmes sont unis par une courbe continue.

Cas 3. Les sels forment des cristaux mixtes dont la série présente une lacune. Les points extrêmes sont reliés par deux courbes se coupant en un point représentant la solution qui est en équilibre avec les deux cristaux mixtes limites. (Voir *Archiv. néerl.*, T. 26, p. 176).

Cas 4. Les sels ne forment que du sel double. Les points extrêmes sont unis par trois courbes, comme dans la fig. 1; les deux courbes extrêmes correspondent aux éléments ou à leurs hydrates respectifs, la courbe moyenne au sel double comme phase solide. Les deux points d'intersection donnent les solutions qui peuvent être en équilibre avec le sel double et avec chacun des éléments (ou de leurs hydrates).

Cas 5. Les sels forment du sel double et, à l'un des côtés, des cristaux mixtes. L'isotherme ressemble à la précédente. Seulement, l'un des points d'intersection correspond à une solution qui est en équilibre avec le sel double et l'un des éléments, l'autre intersection représente une solution qui est en équilibre avec le sel double et avec des cristaux mixtes contenant la proportion maxima du premier élément. (Chlorure ferrique et sel ammoniac).

Cas 6. Les sels forment du sel double et, des deux côtés, des cristaux mixtes. L'isotherme ressemble de nouveau à la précédente. Seulement, aux deux points d'intersection il existe

maintenant du sel double en même temps que des cristaux mixtes contenant la proportion maxima du premier ou du second élément. (A cette catégorie appartiendront les exemples étudiés par M. Retgers; voir p. 2).

Cas 7. Les sels forment un sel double, qui est isomorphe avec l'un des éléments ou avec tous les deux. L'isotherme, dans le cas où il y aurait une série complète de mélanges, serait composée de deux courbes. Le sel double pur ne pourrait exister qu'en présence de la solution qui correspond à l'intersection des courbes, soit seul (lorsqu'il se mèle avec les deux éléments), soit à côté de l'un des éléments, lorsqu'il ne se mêle qu'avec l'autre. Jusqu'à présent, on ne connaît aucun exemple bien constaté de ce type, et la possibilité m'en paraît très problématique.

Cette liste, il est vrai, n'épuise pas encore la série des cas imaginables. Mais les changements de l'isotherme sont faciles à prévoir. C'est ainsi que la formation d'un second sel double [1]), ou d'une seconde espèce de cristaux mixtes, conjointement avec du sel double, aurait pour conséquence que le nombre des courbes devrait être augmenté d'une unité.

Quant à la direction des courbes particulières, qu'elles appartiennent à un élément, à des cristaux mixtes ou à du sel double, tout ce qu'on peut dire de général se réduit à ceci: pour les matières difficilement solubles, l'allure des courbes devra, d'après des raisons théoriques, être telle que, plus la proportion de l'un des éléments augmente dans la solution, plus celle de l'autre y diminue.

Cette règle a d'ailleurs été vérifiée dans différents cas; pour les fortes concentrations, toutefois, les écarts deviennent très grands. Les recherches de M. Engel en donnent des exemples

---

[1]) Par exemple, chez le système $Cu\,Cl_2$, $K\,Cl$, H_2O, où entre 56° et 92° deux sels doubles sont possibles (voir Meyerhoffer, *Zeitschr. f. phys. Chem.*, T. 5, p. 97). Entre ces températures il existe donc deux courbes médianes, au lieu de une, comme dans le cas 4.

variés pour la solubilité des chlorures en présence de l'acide chlorhydrique. M. Schreinemakers a fait des observations analogues au sujet de la solubilité du sel double formé par l'iodure de plomb et l'iodure de potassium.

4. Changement de l'équilibre de saturation d'un mélange de sels par l'addition continue de l'un des éléments.

On sait que M. Rüdorff a le premier appelé l'attention sur la différence qu'on rencontre, en essayant de préparer une solution saturée de deux sels en proportion variables, suivant qu'entre ces sels il n'existe aucune combinaison, ou qu'ils sont capables de former der cristaux mixtes ou un sel double. Cette différence pourrait se formuler ainsi: dans le premier cas l'un des sels déplaçait l'autre de la solution jusqu'à une certaine limite; dans le second cas, ce déplacement paraissait aller jusqu'à l'infini.

Relativement aux sels doubles, ce résultat fut corrigé par moi [1]) en ce sens, qu'il existe pour eux *deux* solutions limites, qu'on obtient quand l'un ou l'autre des éléments se trouve en excès. Toutes les recherches postérieures ont confirmé cet amendement.

Dans mon récent mémoire sur la solubilité des cristaux mixtes [2]), j'ai montré que pour eux aussi le changement continu de la solution saturée peut trouver une limite, dès qu'il se forme une seconde espèce de cristaux mixtes, à rapport de composition différent.

Le mémoire actuel montre, en outre, que pour les sels doubles l'une des solutions limites (ou toutes les deux) peut être atteinte lorsque, à côté du sel double, il se forme des cristaux mixtes; et qu'il en est de même pour les cristaux mixtes, quand à côté d'eux apparaît du sel double. Tous ces

---

[1]) *Recueil des trav. chim. des Pays-Bas*, T. 6, p. 383 (1887) et *Zeitschr. f. phys. Chem.*, T. 2, p. 521 (1888).

[2]) *Arch. néerl.*, T. 26, p. 163.

cas particuliers sont de simples conséquences d'une seule et même loi : la composition d'une solution de deux éléments, à température et pression constantes, varie d'une manière continue lors de l'addition de l'un ou de l'autre élément, tant qu'une seule et même phase solide est en contact avec la solution ; mais cette composition atteint une valeur limite aussitôt que, par suite de l'addition répétée d'un des éléments, il se forme une seconde phase solide.

Seulement, on ne peut pas dire que le changement continu de la solution consiste toujours en un remplacement de l'un des éléments par l'autre, car on connaît déjà plusieurs exemples (voir plus haut) où la quantité de l'un des éléments augmente dans la solution, quand on y fait croître la quantité de l'autre.

Si l'énoncé ci-dessus détermine entièrement la manière dont les solutions de deux éléments se comportent vis-à-vis de chaque phase solide considérée en elle-même, il reste encore à indiquer en quels cas on peut, lors de l'addition continuée de l'un des éléments, passer de l'une des courbes de solubilité à l'autre. Tantôt un pareil passage est possible, tantôt il ne l'est pas. Il n'est possible que lorsque la phase solide, dont la courbe de solubilité a été parcourue à la suite de l'addition d'un des éléments, peut être transformée par ce même élément en l'autre phase solide, dont la courbe de solubilité se rattache à la première. Une pareille transformation n'est donc possible que lorsqu'on passe de la courbe d'un des éléments à celle d'un sel double, d'un sel double à un second sel double, d'un sel double à des cristaux mixtes, de cristaux mixtes à un sel double ou à un second genre de cristaux mixtes. Une pareille transformation n'est *pas* possible quand on doit passer de l'un des éléments à l'autre, ou du sel double à l'un des éléments.

En tous les points d'intersection de la première espèce, la composition de la solution ne restera donc constante que jusqu'au moment où, par suite de l'addition répétée de l'un des éléments, aura été effectuée la transformation complète de la première phase solide en la seconde. En tous les points

d'intersection de la seconde espèce, au contraire la solution conservera inalterée sa composition, quelque grande que soit l'addition de l'élément, précisément parce que celui-ci se dépose à côté de la phase solide déjà présente, sans se transformer avec elle.

En appliquant ces considérations aux différents types d'association énumérés p 20, on arrive au résultat suivant.

Partant de la solution saturée de l'un des éléments et d'un excès de cet élément, puis ajoutant successivement de nouvelles quantités du second élément, on pourra parcourir, tantôt toutes les courbes qui dans la représentation graphique unissent l'une à l'autre les solutions saturées des deux éléments, tantôt toutes ces courbes à l'exception d'une seule. Le premier cas se réalise chez les types d'association 2, 3, 6; le second, chez le type 1, où l'une seulement des deux courbes peut être parcourue, et chez le type 4, où deux seulement des trois courbes peuvent être parcourues: et cela, soit que l'on commence par l'une ou par l'autre des deux solutions saturées. Pour le type d'association 5, au contraire, deux seulement des trois courbes sont parcourues lorsqu'on part de l'élément qui donne des cristaux mixtes avec l'autre (par ex. du sel ammoniac), tandis que dans la direction opposée les courbes peuvent être parcourues successivement toutes les trois, parce qu'alors il y a passage du sel double aux cristaux mixtes. Chez le type d'association 7, on pourrait parcourir les deux courbes si le sel double se mêlait avec chacun des deux éléments; si non, on le pourrait seulement en partant de l'élément avec lequel il ne se fait pas de mélange.

Les recherches précédentes ayant indiqué une différence quant à la manière dont se comportent, d'une part les couples salins qui ne donnent que du sel double, d'autre part ceux qui peuvent fournir en outre des cristaux mixtes, il faudra dorénavant avoir soin d'examiner si, en ajoutant à la solution

saturée d'un sel double l'un de ses éléments, on atteint une solution limite qui reste constante indéfiniment ou seulement pendant quelque temps. Dans ce dernier cas, il y a eu transformation en cristaux mixtes. Lorsque dans ceux-ci la proportion maxima du premier élément est très petite, le second doit être ajouté en très grande quantité avant que la transformation soit complète et que la composition de la solution puisse de nouveau être changée par une nouvelle addition.

Presque aucun des exemples de M. Rüdorff n'ayant été étudié d'une manière suffisante, la possibilité subsiste que parmi eux il s'en trouve qui appartiennent au type d'association 5 ou 6 [1]).

CONCLUSIONS.

Résumons les résultats auxquels nous sommes arrivés.

La solubilité du couple salin $Fe_2\ Cl_6$ et $NH_4\ Cl$ à 15° est exprimée par une isotherme composée de trois courbes, qui se coupent deux à deux.

La première courbe indique les solutions qui sont en équilibre avec $Fe_2\ Cl_6 . 12\ H_2\ O$; elle s'étend entre les limites:

$$\left.\begin{array}{llll} 9{,}30 \text{ jusqu'à} & 9{,}93 & \text{mol.} & Fe\ Cl_3 \\ \text{et } 0 \quad „ & 1{,}36 & „ & H_4NCl \end{array}\right\} \text{ sur 100 mol. } H_2O.$$

---

[1]) Le seul exemple que M. Rüdorff ait examiné en détail, celui du couple sulfate de cuivre et sulfate d'ammoniaque, est lui-même encore incertain. En apparence, il ressort des données de M. Rudorff que la solution changea, même après qu'il y eut excès de sulfate d'ammoniaque. Mais l'auteur ne connaissait pas encore la signification de la solution limite du sel double, et en conséquence le changement semble continu. M. Ostwald remarque bien (*Lehrb. der allgem. Chemie*, 2e éd., T. Ier, p. 1078) qu'ayant répété ces expériences, en 1884, il obtint une solution limite en présence d'un excès de sulfate d'ammoniaque, mais il n'en donne pas la composition; la comparaison avec les données de M. Rüdorff est donc impossible, et il reste par suite douteux si l'addition de sulfate d'ammoniaque a été poussée assez loin pour que le sel double ait pu, éventuellement, se convertir en cristaux mixtes.

La seconde courbe donne les compositions des solutions qui sont en équilibre avec le sel double 4 NH_4 Cl. Fe_2 Cl_6. 2 H_2O; elle existe entre les limites:

9,93 jusqu'à 6,8 mol. $Fe\,Cl_3$ ⎫
et 1,36 „ 7,8 „ NH_4Cl ⎭ sur 100 mol. H_2O

La troisième courbe représente les solutions qui peuvent exister en contact avec des cristaux mixtes dont la teneur en chlorure ferrique diminue de 7,3 % jusqu'à 0, pendant que la solution change sa teneur:

de 6 8 jusqu'à 0 mol. $Fe\,Cl_4$ ⎫
et 7,8 „ 11,88 „ $NH_4\,Cl$ ⎭ sur 100 mol. H_2O.

La solution du premier point d'intersection subsiste donc en présence de Fe_2 Cl_6. 12 H_2 O et du sel double; celle du second point d'intersection, en présence du sel double et de cristaux mixtes à proportion maxima de fer.

La composition des solutions, en ces points, est indépendante de la quantité des deux phases solides. Mais, tandis qu'au premier point d'intersection la solution n'éprouve aucun changement ultérieur par l'addition d'hydrate de chlorure ferrique, et que l'addition de sel ammoniac ne la laisse inaltérée que jusqu' au moment où tout le chlorure ferrique solide est converti en sel double, — au second point d'intersection un passage de l'une des courbes à l'autre est possible tant par l'addition de l'un que de l'autre des éléments, parce que tous les deux peuvent effectuer la conversion de l'une des phases solides en l'autre.

La courbe du sel double montre que celui-ci n'est pas soluble sans décomposition.

Les cristaux mixtes contiennent le chlorure ferrique à l'état de Fe_2Cl_6 avec 7 à 8 H_2O; on ne peut encore dire si cet élément accessoire y est isotrope ou anisotrope.

Le rapport entre la teneur en fer de la solution et celle des cristaux mixtes n'est pas non plus connu exactement, vu qu'il présente des oscillations non expliquées jusqu'ici.

La forme générale de l'isotherme de solubilité s'est de nouveau trouvée d'accord avec la règle des phases de Gibbs, et a permis de donner un aperçu complet de la forme des isothermes de solubilité pour les différents types d'association que deux corps solides peuvent présenter.

Ces isothermes sont formées d'une seule courbe, ou de plusieurs courbes qui se coupent nettement deux à deux.

Nous avons cherché aussi comment, pour les différents types d'association, les solutions mixtes varient quand on ajoute de l'un ou de l'autre des deux éléments. Il s'est trouvé que les courbes de l'isotherme peuvent tantôt être parcourues toutes l'une après l'autre, tantôt toutes à une seule près. Ce dernier cas a lieu lorsqu'on doit passer de la courbe de l'un des éléments à celle de l'autre, ou de la courbe d'une combinaison des deux éléments à celle d'un des éléments, — le premier cas, pour toute autre succession des phases solides.

Laboratoire de chimie inorganique de l'Université
de Leiden, Juin 1892.

LES HYDRATES DU CHLORURE FERRIQUE,

PAR

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM.

Pas plus que la grande majorité des sels, le chlorure ferrique n'avait été jusqu'ici l'objet d'une étude systématique en ce qui concerne les équilibres entre ses hydrates possibles et la solution aqueuse.

Après les recherches qu'en 1889 j'avais exécutées à ce point de vue sur le système chlorure de calcium et eau [1]), il restait peu de chances qu'une nouvelle étude, portant sur un autre sel, amenât la découverte de phénomènes nouveaux. Tout ce qu'on pouvait attendre, c'est que les mêmes phénomènes d'équilibre se produiraient dans un autre ordre ou à une échelle plus grande ou plus petite, et que peut-être on rencontrerait des formes de combinaison encore inconnues.

Ces prévisions ont été pleinement confirmées pour le chlorure ferrique. J'étais conduit à m'occuper de ce sel, d'abord parce que la connaissance de ses hydrates possibles était nécessaire pour l'interprétation correcte de la nature des cristaux mixtes que le chlorure ferrique forme avec le sel ammoniac [2]), et, en second lieu, parce que je me proposais de faire des recherches sur les systèmes constitués par $Fe_2 Cl_6$, $H_2 O$ et $H Cl$, recherches auxquelles l'étude des relations entre $Fe_2 Cl_6$ et $H_2 O$ devait servir de base.

---

[1]) *Rec. Trav. chim. Pays-Bas*, T. VIII, p. 1—146: *Arch. néerl.* T. XXIII, p. 199—354.

[2]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, X, p. 145. 1892. *Arch. néerl.*, T. XXVII, p. 1.

I. Les hydrates et leur solubilité.

Depuis le commencement du siècle on connaît, outre le chlorure ferrique anhydre, deux hydrates de ce sel, l'un de couleur jaune orangé, l'autre de couleur brun rougeâtre. Le premier, qui est aujourd'hui préparé en grand, fut reconnu, en 1839, par Mohr [1]) et par Fritsche [2]), avoir la composition $Fe_2\ Cl_6.\ 12\ H_2\ O$; le second, obtenu par différents observateurs au moyen d'une évaporation plus prolongée, avec ou sans addition d'acide chlorhydrique, a été décrit par Wittstein [3]) et Ordway [4]) comme contenant $6\ H_2 O$, tandis que Fritsche et Gobley [5]) ne lui attribuent que $5\ H_2\ O$.

Pour les points de fusion, on possède une couple de données non concordantes; pour les solubilités, il n'en existe aucune.

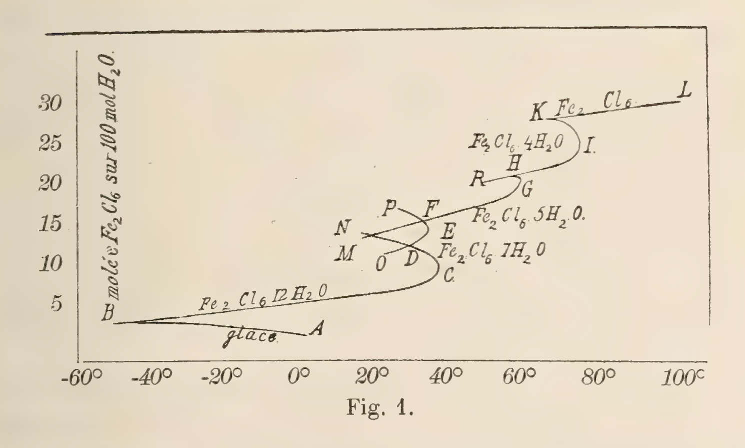


Fig. 1.

Je commençai par déterminer les deux courbes de solubilité. Les fragments jaunes du sel du commerce furent soumis à

---

[1]) *Ann. f. Pharm.*, XXIX, p. 173. 1839.

[2]) *Journ. f. prakt. Chem.*, XVIII, p. 479. 1839.

[3]) *Repert. Pharm.*, (2), XXXVI, p. 30. 1844.

[4]) *Journ. de Pharm.*, (3), V, p. 301. 1844.

[5]) *Journ de Pharm.*, (3), XXV, p. 259.

de nouvelles cristallisations répétées. Pour cela, l'addition d'eau n'est pas nécessaire; on fait fondre la masse cristalline au bain-marie, puis on l'abandonne à elle-même. La cristallisation s'opère très lentement, lorsque le liquide est laissé en parfait repos. On peut alors obtenir en abondance des mamelons hémisphériques isolés, d'une grande pureté.

Avec le produit ainsi purifié furent exécutées les expériences de solubilité, pour lesquelles un grand excès de l'hydrate était fréquemment agité avec une petite quantité d'eau, à la température voulue, qui pouvait être maintenue constante à 0°,1 près. L'établissement de l'équilibre, surtout aux basses températures, demande beaucoup de temps, et on doit toujours avoir soin d'atteindre cet équilibre par dissolution de l'hydrate, vu qu'on y arrive encore beaucoup plus lentement par séparation de ce qui a été dissous en trop.

La richesse de la solution était déterminée soit en titrant le chlore avec les solutions d'argent et de rhodanure [1]), soit en pesant le $Fe_2\,O_3$ précipité, après qu'on se fut d'abord assuré, par l'application des deux méthodes, que l'hydrate employé était entièrement exempt de $H\,Cl$ et de $Fe_2\,O_3$.

Les résultats de toutes les déterminations de solubilité ont été réunis en tableaux, qu'on trouvera à la fin de ce mémoire; ils sont en outre représentés graphiquement, par une série de courbes, dans la fig. 1. A l'hydrate jaune $Fe_2\,Cl_6 . 12\,H_2O$ correspond la courbe $B\,C$.

La richesse de la solution augmente avec la température; en outre, l'accroissement de la solubilité, et par conséquent aussi la courbure de la courbe, deviennent de plus en plus grands, jusqu'à ce que, en C, soit atteint le point de fusion. La détermination de ce point ne comporte pas une grande exactitude. La fusion s'opère si lentement, que la masse fondue peut bien acquérir une température d'une couple de degrés

[1]) Sur l'exactitude de cette méthode, voir le mémoire précédent.

plus élevée que ne l'est la température de fusion des cristaux restants. Aussi la détermination ne réussit-elle que si on laisse la fusion s'accomplir dans un bain dont la température ne dépasse que de très peu la température de fusion. La masse à fondre doit alors avoir très exactement la composition $Fe_2\,Cl_6 \,.\, 12\,H_2O$. J'ai cherché à y parvenir par fusion répétée, solidification partielle et décantation de l'eau-mère; la température trouvée, 37°, peut toutefois être encore en erreur de quelques dixièmes de degré [1]).

La méthode du sous-refroidissement, ordinairement employée, n'est ici d'aucun secours pour arriver à une détermination plus précise. La masse fondue étant agitée avec un cristal, on peut bien la refroidir jusque vers 25° avant que, par cristallisation, il se produise une élévation de température. Plus la température se rapproche du point de fusion, plus l'élévation devient lente, de sorte qu'elle est absolument sans valeur pour la détermination exacte du point de fusion.

Quand on n'agite pas, la cristallisation n'avance qu'avec une lenteur extrême. Plus d'une fois, j'ai trouvé qu'à la température de chambre il ne s'était cristallisé, en 24 heures, que $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{10}$ de la masse fondue.

Après que la courbe de solubilité du $Fe_2\,Cl_6 \,.\, 12\,H_2O$ eut été établie jusqu'au point de fusion, je passai à l'hydrate brun rougeâtre. La manière la plus facile de le préparer consiste à partir de l'hydrate à $12\,H_2O$, dont on laisse évaporer, au bain-marie, environ la moitié de l'eau. Après refroidissement à la température de chambre, la plus grande partie de la masse se dépose en gros et superbes cristaux, dont l'union est très lâche de sorte qu'on peut sans la moindre peine les débarrasser de l'eau-mère. Comme un peu de $H\,Cl$ se perd durant l'évaporation, les cristaux doivent être purifiés

---

[1]) M. Ordway a donné le chiffre 35°,5; voir *Sill. Amer. Journ.*, (2), XL, p 329.

par une couple de nouvelles cristallisations; il suffit, à cet effet, de les refondre et de laisser cristalliser par fractions.

Leur solubilité croît très régulièrement avec la température, de sorte que la courbe *M F G*, de 10° à 50°, forme presque une ligne droite. Au-delà, elle monte un peu plus rapidement, pour atteindre à 56° le point de fusion (*G*). Par décantation répétée de l'eau-mère, on parvient très facilement à obtenir une masse cristalline qui se liquéfie en entier à température constante. La détermination de cette température se fait beaucoup plus rapidement que pour l'hydrate jaune, parce que lors du chauffage les cristaux fondent promptement et que, lors du refroidissement, la cristallisation rapide maintient pendant très longtemps la température au voisinage du point de fusion.

La composition de la solution au point de fusion, et par conséquent aussi celle des cristaux, était: 100 H_2O. 20 Fe_2Cl_6 (trouvé 20,01), ou

$$Fe_2Cl_6 . 5\, H_2O.$$

La formule de cet hydrate se trouve ainsi établie telle que l'admettait Fritsche, dont les analyses ne concordaient pas suffisamment, parce que pour l'analyse il retirait les cristaux de la solution et que ces cristaux sont très déliquescents [1]). On voit par là que, pour les substances attirant fortement l'eau, la poursuite de la courbe de solubilité jusqu'au point de fusion est la méthode la plus sûre pour déterminer leur composition.

Les données antérieures sur le point de fusion du cinqième hydrate sont toutes trop faibles. La forme cristalline, par contre, a été correctement décrite par Wittstein comme appartenant au système rhombique. En laissant refroidir lentement la so-

---

[1]) Les données de Wittstein et de Gobley n'ont aucune valeur, vu qu'ils ont exécuté leurs analyses sur des masses cristallines solidifiées à la température ordinaire, masses dont l'homogénéité est tout à fait incertaine. A 43°, d'après la courbe, la solution saturée de l'hydrate est déjà devenue de 1 H_2O plus riche.

lution, on peut obtenir de très beaux spécimens, dans lesquels dominent les faces du prisme, du dome et de la base.

L'observation au microscope polarisant a mis hors de doute la forme rhombique des cristaux. En même temps, elle y a nettement accusé un dichroïsme allant du jaune au jaune brunâtre. La couleur des cristaux macroscopiques, naturellement, dépend beaucoup de leur volume. Tandis que les petits paraissent d'un brun rougeâtre clair, les grands sont presque noirs.

Les courbes *B C* (pour $Fe_2\,Cl_6\,.\,12\,H_2O$) et *M F G* (pour $Fe_2\,Cl_6\,.\,5\,H_2O$) sont assez éloignées l'une de l'autre, bien qu'elles s'étendent en commun sur un intervalle de température passablement grand. Un pareil cas est possible lorsque l'hydrate le plus soluble est instable, comme M. Loewel l'a montré pour les deux modifications de $Mg\,SO_4\,.\,7\,H_2O$, pour celles de $Na_2\,CO_3\,.\,7\,H_2O$ et aussi pour ces deux dernières par rapport à $Na_2\,CO_3\,.\,10\,H_2O$; moi-même j'ai trouvé un exemple de ce genre chez les deux modifications de $Ca\,Cl_2\,.\,4\,H_2O$ et les hydrates du sulfate thorique. Ici, toutefois, nous n'avons pas affaire à ce cas.

Une autre possibilité serait que, à partir du point de fusion de l'hydrate le plus élevé, une seconde branche de la courbe de solubilité de cet hydrate s'étendît du côté des températures plus basses mais des concentrations plus fortes, et que cette seconde branche rencontrât quelque part la courbe *M F G*. De ce cas j'ai trouvé un exemple chez les hydrates $Ca\,Cl_2\,.\,6H_2O$, et $Ca\,Cl_2\,.\,4\,H_2O\,\beta$. Un semblable point d'intersection est alors la température la plus basse pour les deux courbes (abstraction faite des états instables), la solution saturée s'y solidifiant en un mélange des deux hydrates.

J'ai cru d'abord qu'ici également il s'agissait de ce cas. Plus d'une fois, en effet, des solutions saturées de $Fe_2\,Cl_6\,.\,5\,H_2O$, refroidies au-dessous de 25°, s'étaient solidifiées soit spontanément soit après qu'on y eut projeté du $Fe_2\,Cl_6\,.\,12\,H_2O$, la température se relevant alors, dans le cas le plus favorable, jusqu'à 30°. En apparence, il semblait donc que la solution

se fût prise en un mélange du douzième et du cinqième hydrate.

La détermination de la seconde branche de la courbe relative à $Fe_2\ Cl_6 . 12\ H_2 O$ fit reconnaître, toutefois, la fausseté de de cette conclusion. Par fusion combinée de $Fe_2 Cl_6 . 12\ H_2 O$ et $Fe_2\ Cl_6 . 5\ H_2 O$ on prépara des solutions dont la teneur en eau était au-dessous de 12 mol., et ces solutions furent agitées avec des cristaux du douzième hydrate jusqu'à ce que l'équilibre fût établi. Il se trouva, tout comme précédemment pour les solutions contenant plus de 12 mol. d'eau, que l'équilibre se produisait beaucoup plus rapidement lorsque l'hydrate solide devait se dissoudre que lorsqu'il devait se séparer du liquide. Les déterminations eurent lieu à des températures comprises entre 8° et le point de fusion. Elles sont représentées par la courbe *N D C.*

Cette courbe, toutefois, ne rencontre pas celle de $Fe_2 Cl_6 . 5\ H_2 O$ à 30°; la solidification des solutions saturées de cet hydrate ne peut donc être expliquée par la formation de $Fe_2 Cl_6 . 12 H_2 O$.

A l'occasion des déterminations pour la courbe *N D C*, on observa, en outre, que les solutions correspondant à cette courbe et en équilibre avec $Fe_2\ Cl_6 .12\ H_2 O$ se solidifiaient toujours spontanément à la température de chambre après un temps plus ou moins long, et que la projection de $Fe_2 Cl_6 . 5 H_2 O$ parfois amorçait cette solidification, mais d'autres fois ne produisait pas cet effet. Cela rendait improbable, ici également, que ces solutions se prissent en un mélange des hydrates à 12 et à 5 mol. $H_2 O$. Finalement, l'observation répétée fit connaître que le point de solidification (*D*) de ces solutions se trouvait à 27°,4 et était donc de 2°,6 plus bas que le point de solidification *F* sur la courbe *G F.*

Pour la composition des solutions en ces deux points, on trouva:

sur la courbe

GF à 30° (*F*): $100\ H_2 O . 15\ Fe_2\ Cl_6 = Fe_2\ Cl_6 . 6{,}66\ H_2 O$

sur la courbe

CD à 27°,4 (*D*): $100\ H_2 O . 12{,}15\ Fe_2\ Cl_6 = Fe_2\ Cl_6 . 8{,}23\ H_2 O$.

Ces résultats ne se laissaient expliquer d'aucune autre manière qu'en admettant l'existence d'un hydrate intermédiaire encore inconnu, dont la courbe de solubilité rencontrerait celle du douzième hydrate en *D*, celle du cinqième hydrate en *F*. Comme, en ces deux points, il y avait solidification complète des deux solutions, il fallait aussi que la teneur en eau de cet hydrate fût plus grande que celle de la solution en *F* et plus petite que celle de la solution en *D*; cette teneur devait donc être comprise entre 6,66 et 8,23 mol. H_2O.

La voie à suivre se trouvait ainsi aplanie. Par fusion conjointe des hydrates à 12 et à 5 H_2O, je préparai une solution un peu plus riche en $FeCl_3$ que si elle avait correspondu au point *D*. Après que cette solution se fut prise en masse à la température ordinaire, on chauffa jusqu'à un peu au-dessus de 27°,4. Vu la composition de la masse totale, on devait alors avoir la solution avec le nouvel hydrate, le $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$ disparaissant à 27°,4. Effectivement, il resta dans la solution une masse cristalline, dont l'aspect différait de celui des hydrates à 5 et à 12 H_2O; les lamelles minces, qui étaient suffisamment translucides, présentaient, au lieu de la couleur jaune pur de l'hydrate douze, une teinte distinctement jaune brunâtre, à peu près semblable à celle des cristaux du soufre monocline.

Ensuite fut préparée, en quantité plus grande, une solution contenant environ $7\frac{1}{2}$ molécules d'eau. Alors que celle-ci n'avait pas encore cristallisé à la température de chambre, l'ensemencement des cristaux dont il vient d'être question y provoqua une cristallisation abondante. Par des opérations répétées de décantation de l'eau-mère, de fusion des cristaux et de nouvelle cristallisation partielle, la masse fut purifiée, jusqu'à ce qu'elle fondît tout entière à température constante.

L'analyse de cette masse donna:

Quantité pesée: 1,2056 gr; dont

¼, titré par les solutions d'argent et de rhodanure, $=$ 4,010 éq. de chlore $=$ 0,6683 mol. $Fe_2\ Cl_6 = 217^{\text{mgr}}$;

¼, précipité par $H_3\ N, = 107,2^{\text{mgr}}\ Fe_2\ O_3 = 217,5^{\text{mgr}}\ Fe_2\ Cl_6 =$ 0,67 mol.

D'après le dosage du Cl, il y aurait pour 1 $Fe_2\ Cl_6$: 7,02 $H_2\ O$.

„ „ „ „ $Fe_2\ O_3$, „ „ „ : 6,96 „

Le nouvel hydrate est donc:

$$Fe_2\ Cl_6 .\ 7\ H_2\ O.$$

Son point de fusion se trouve à 32°,5 [1]). La détermination de quelques autres points de la courbe de solubilité montra, comme on pouvait le prévoir, que c'était précisément cette nouvelle courbe qui passait par les points D et F: que cette courbe aussi consistait en deux branches $O\ D\ E$ et $P\ F\ E$, qui se rencontraient au point de fusion. La première branche (solutions avec plus d'eau que l'hydrate) ne pouvait être poursuivie vers le bas que jusqu'à 20°, parce qu'alors apparaissait spontanément $Fe_2\ Cl_6 .\ 12\ H_2\ O$; la seconde branche (solutions avec moins d'eau) ne se laissait suivre que jusqu'à 25°, parce qu'il se formait bientôt du $Fe_2\ Cl_6 .\ 5\ H_2\ O$; de sorte que dans les deux cas les solutions se solidifiaient, en donnant les mélanges cristallins qui auraient déjà dû se produire en D et en F.

La partie stable de la courbe de solubilité ne s'étendant donc que sur $D\ E\ F$ (de 27°,4 et de 30° jusqu'à 32°,5), il est très compréhensible que cet hydrate ne pouvait guère être découvert que par une étude systématique des courbes.

L'aptitude de cet hydrate à cristalliser tient le milieu entre celles des deux hydrates voisins. Les cristaux sont toujours

---

[1]) Il est très remarquable que ce point de fusion soit inférieur à celui de l'hydrate à 12 $H_2\ O$. J'ai observé, il y a quelque temps, une singularité analogue pour le $Al_2\ Br_6$, qui, anhydre, fond à 95°, tandis que, hydraté, il ne se liquéfie pas encore à 100° (*Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*) T. VIII, p. 268 (1889).

nettement conformés, mais beaucoup plus petits que ceux du cinquième hydrate et réunis en agrégats assez serrés.

Au microscope, on reconnait qu'ils sont, comme l'hydrate à 12 H_2O, monoclines. Bien que les cristaux microscopiques ne soient pas beaucoup plus foncés que ceux de l'hydrate douze, ils s'en distinguent facilement à la lumière polarisée par leur dichroïsme très intense, où les couleurs varient du jaune au bleu [1]).

Dans les masses cristallines un peu volumineuses, la couleur devient passablement foncée, de sorte que les cristaux peuvent alors facilement être confondus avec ceux de $Fe_2\,Cl_6 . 5\,H_2\,O$, surtout au sein de la solution saturée, elle-même de couleur foncée. Un cristal est-il toutefois jeté dans l'eau, il se montre de teinte beaucoup plus claire. Une autre différence se trouve dans le degré d'hygroscopicité. Tandis que les cristaux de $Fe_2\,Cl_6 . 12\,H_2\,O$, exposés à l'air de la chambre, restent très longtemps inaltérés, et que ceux de $Fe_2\,Cl_6 . 5\,H_2\,O$ sont excessivement déliquescents, les cristaux de $Fe_2\,Cl_6 . 7\,H_2\,O$ n'attirent l'humidité qu'assez lentement et se couvrent alors ordinairement très vite d'un enduit de $Fe_2\,Cl_6 . 12\,H_2\,O$ jaune, après quoi la déliquescence s'arrête.

Revenons maintenant à la courbe de solubilité de $Fe_2\,Cl_6 . 5\,H_2\,O$. Nous l'avons déjà déterminée jusqu'au point de fusion de cet hydrate, à 56°. Des solutions renfermant moins de 5 mol. H_2O se laissent le mieux préparer par dissolution de $Fe_2\,Cl_6$ anhydre dans du $Fe_2\,Cl_6 . 5\,H_2\,O$ fondu. Même en ne faisant ainsi dissoudre que peu de $Fe_2\,Cl_6$, on voit bientôt se former, pendant le refroidissement, une cristallisation grenue, qui se distingue nettement du cinquième hydrate non seulement par la forme des cristaux, mais aussi par la couleur. Celle-ci, en effet, est d'un rouge beaucoup plus clair.

---

[1]) Ce dichroïsme est semblable à celui qu'on observe dans les cristaux mixtes de chlorure ferrique et de sel ammoniac. Voir mon Mémoire précédent.

Plus on fait dissoudre de $Fe_2\ Cl_6$, plus s'élève la température jusqu'à laquelle les nouveaux cristaux peuvent exister en présence de la solution. Refroidit-on la solution, leur nombre augmente; continue-t-on toutefois à refroidir, il vient un moment où le liquide se solidifie tout à coup avec dégagement de chaleur: à côté des nouveaux cristaux il s'en sépare alors aussi, et en plus grande quantité, du type $Fe_2\ Cl_6\ .\ 5\ H_2O$. Jamais je n'ai eu besoin, pour amener cette solidification, d'abaisser la température au-dessous de 40°. Fréquemment elle se produit déjà vers 50°. La température de fusion du mélange est 55°. La solution qui résulte de cette fusion a la composition 100 $H_2O\ .\ 20{,}32\ Fe_2\ Cl_6$. Sa richesse en Fe_2Cl_6 n'est donc que peu supérieure à celle du cinquième hydrate, ce qui explique pourquoi, lors de la solidification en un mélange du cinquième et du nouvel hydrate, la proportion du $Fe_2\ Cl_6\ .\ 5\ H_2O$ formé est extrêmement grande. Evidemment, la solution à 55° appartient à la seconde branche de la courbe de solubilité du cinquième l'hydrate. La partie stable de cette branche ne va donc que de G à H (56° à 55°). Au-dessous de 55°, le nouvel hydrate se produit si rapidement, que la détermination d'autres points ne m'a pas réussi.

La courbe du nouvel hydrate a été poursuivie jusqu'au point de fusion de celui-ci. Ce point et la composition de l'hydrate ont été déterminés aussi exactement que possible, par décantation répétée de la solution saturée. Pour le point de fusion, je trouvai 73°,5; pour la composition des cristaux, qui par action centrifuge avaient été débarrassés autant que possible de la masse fondue:

$$Fe_2\ Cl_6\ .\ 4\ H_2O.$$

Analyse: De $4\overset{gr}{,}0572$, $\frac{1}{10}$ fut titré, $\frac{1}{10}$ précipité par NH_3.

Trouvé: 6,14 éq. $Cl = 1.023$ mol. $Fe_2\ Cl_6 = 332\overset{mg}{,}4\ Fe_2\ Cl_6$;
$163\overset{mg}{,}4\ Fe_2O_3 = 331\overset{mg}{,}2\ Fe_2Cl_6$.

D'après le dosage du Cl, il y aurait pour 1 Fe_2Cl_6 : 3,98 H_2O,
» » » » Fe_2O_3, » » » » » : 4,05 »

L'observation microscopique conduit à rapporter les cristaux du quatrième hydrate [1]) au système rhombique [2]). En lumière polarisée, ils présentent un dichroïsme allant du jaune au brun.

Les solutions, jusqu'au point de fusion de l'hydrate $Fe_2\ Cl_6 . 4\ H_2O$, sont représentées par la courbe $R\ H\ I$.

Fait-on dissoudre encore plus de $Fe_2 Cl_6$ anhydre, on obtient des liquides pouvant de nouveau coexister avec $Fe_2 Cl_6 . 4\ H_2 O$ à des températures plus basses que le point de fusion.

Ces solutions forment, comme dans les cas antérieurs, une seconde branche de la courbe de solubilité, qui a pu être poursuivie depuis 73°,5 jusqu'à 66° (courbe IK), la proportion de fer allant toujours en augmentant.

Au-dessous de 66°, il peut de nouveau s'opérer une solidification complète, la solution se partageant en $Fe_2\ Cl_6 . 4\ H_2 O$ et $Fe_2\ Cl_6$, ce qui fait remonter la température jusqu'à 66°.

On pouvait donc prévoir que la courbe de solubilité du $Fe_2\ Cl_6$ se rattacherait, à 66°, à la seconde branche de la courbe du quatrième hydrate. Tel est effectivement le cas. La solution saturée à 66° de $Fe_2 Cl_6 . 4\ H_2 O$ peut aussi exister à côté de $Fe_2 Cl_6$, et aux températures plus élevées sa composition ne change que peu, de sorte que la courbe de solubilité (KL) du $Fe_2 Cl_6$ anhydre a une direction presque horizontale.

Au-dessous de 66°, ces solutions devraient également se solidifier en un mélange de $Fe_2 Cl_6$ et $Fe_2 Cl_6 .4\ H_2 O$, mais la

---

[1]) Lorsque la composition me fut connue, j'essayai de préparer cet hydrate en continuant à évaporer la solution L'expérience apprit, toutefois, qu'au bain-marie on ne dépasse guère 5 mol. H_2O, à moins d'amener dans la liqueur de l'acide chlorhydrique sec. Mais alors les cristaux de l'hydrate quatre, formés pendant le refroidissement, auraient retenu trop d'eau-mère chargée d'un excès de $H\ Cl$ pour qu'on pût espérer obtenir beaucoup de produit pur.

[2]) Cette détermination ne réussit, bien entendu, qu'après qu'on a laissé se séparer, par fusion à 55°, l'hydrate à 5 H_2O. L'addition d'acide chlorhydrique peut toutefois abaisser considérablement cette température. — Je suis de nouveau redevable à M. Schröder van der Kolk des indications ici données sur les systèmes cristallins.

solidification peut parfois se faire attendre jusqu'à environ 45°.

La courbe *KL* n'a pas été poursuivie au-delà de 100°. Déjà à des températures inférieures commence une légère décomposition, reconnaissable à l'odeur de chlore. Des déterminations ultérieures ne seraient donc possibles qu'en vase clos. Comme le point de fusion du $Fe_2\,Cl_6$ n'est pas connu, mais se trouve en tout cas très haut, et que des phénomènes nouveaux n'étaient pas à prévoir, je ne me suis pas occupé de cette dernière partie de la courbe de solubilité.

Par contre, j'ai fait quelques expériences tendant à compléter les courbes de solubilité du côté des températures très basses. A cet effet, je déterminai la solubilité du $Fe_2\,Cl_6 . 12\,H_2\,O$ jusqu'à —40°, et jusqu'à cette même température je déterminai également la composition des solutions qui étaient en équilibre avec la glace. Ces dernières donnent la courbe *AB*. Le point cryohydratique *B*, qui résulterait de l'intersection de la courbe de la glace avec la courbe de solubilité du douzième hydrate, ne peut toutefois être fixé exactement. Plus la température s'abaisse, plus devient lent l'établissement de l'équilibre entre la solution et l'hydrate, et surtout la séparation de celui-ci demande un temps excessivement long. Aussi, tandis que le prolongement des parties connues des deux courbes donnerait pour le point d'intersection, avec une assez grande probabilité, la température —55 [1]) et la concentration 2,75 mol. $Fe_2\,Cl_6$, on a bien pu, en refroidissant au-dessous de —50° une solution qui était en contact à la fois avec de la glace et du $Fe_2\,Cl_6$. $12\,H_2\,O$, y observer un accroissement progressif de consistance,

---

[1]) Il semblerait, d'après cela, que le $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$ et la glace dussent former ensemble un excellent mélange réfrigérant. Mais la dissolution du sel s'opère beaucoup trop lentement pour que ce mélange soit pratiquement utilisable. Alors que son minimum possible de température est le même qui celui du mélange chlorure de calcium et glace, avec ce dernier on atteint facilement et rapidement —40°, avec le premier, difficilement et lentement —25°.

mais non une solidification subite, pas même quand la température était abaissée jusqu'à —75° [1]).

Après avoir, dans ce qui précède, exposé d'une manière générale les relations du chlorure ferrique et de l'eau, je vais maintenant traiter de quelques points particuliers.

II. Forme des courbes de solubilité.

Les courbes de solubilité de tous les hydrates du chlorure ferrique présentent la particularité d'être composées de deux branches qui se réunissent au point de fusion, en sorte qu'à des températures plus basses que ce point de fusion deux solutions saturées différentes sont possibles, l'une avec plus et l'autre avec moins d'eau que n'en contient l'hydrate solide.

Dans la catégorie des hydrates salins, j'ai pour la première fois rencontré des cas de ce genre chez l'hexahydrate de chlorure de calcium [2]). Là, toutefois, la courbe des solutions qui contenaient moins d'eau que l'hydrate ne s'étendait que sur l'espace de un degré au-dessous du point de fusion. Si elle n'avait été en même temps un terme indispensable pour l'explication de l'ensemble des relations offertes par les différents hydrates, la réalité de pareilles solutions imprévues aurait peut-être été mise en doute.

Mais pour moi l'existence de ces solutions n'était qu'un cas particulier d'un phénomène général. Après que je les eus observées chez les hydrates des gaz, M. van der Waals fit voir, comme résultant de la théorie thermodynamique, que dans les équilibres qui pour deux substances s'établissent entre un corps solide, un liquide et une vapeur, on pouvait s'attendre à les rencontrer généralement; que, par conséquent,

---

[1]) Les températures jusqu'à —30° furent obtenues avec le mélange chlorure calcique hexahydraté et glace; les températures plus basses, au moyen de l'alcool et de l'acide carbonique solide.

[2]) *Rec. Trav. Chim.*, T. VIII, p. 7, (1889); *Arch. néerl.* T. XXIII, p 211.

la courbe qui représente la composition de pareils liquides à différentes températures peut consister en deux branches, qui convergent à la température de fusion de la combinaison solide. Ce résultat restait vrai encore lorsque, au lieu de l'équilibre à la pression de la vapeur, on considérait seulement l'équilibre à pression constante entre les phases solides et liquides.

Aussi, à la fin du Mémoire où j'appliquai cette théorie à mes observations [1]), j'ai déjà signalé la possibilité de la coexistence d'hydrates salins avec des solutions saturées contenant moins d'eau qu'eux. On ne pouvait savoir d'avance, toutefois, s'il n'y avait pas des causes qui, chez les hydrates des sels, ne permettaient que rarement la manifestation du phénomène. J'indiquais qu'une semblable cause pouvait se trouver dans la circonstance qu'un grand nombre d'hydrates salins ne possèdent pas de point de fusion, parce que, avant d'atteindre celui-ci, ils se transforment en un hydrate plus pauvre en eau. Néanmoins, comme j'avais aussi observé le phénomène chez $NH_4\,Br.\,3\,NH_3$, combinaison saline où NH_3 joue un rôle tout à fait analogue à celui de l'eau, je ne doutai pas un instant que le phénomène ne pût apparaître également chez les hydrates de sels, et probablement le mieux chez ceux qui présentent un point de fusion.

Depuis mon observation sur $Ca\,Cl_2\,.\,6\,H_2\,O$, le fait en question n'a pas été constaté chez d'autres sels. J'ai seulement pu déduire, des observations de M. Engel, que l'existence d'une solution plus pauvre en eau devait être possible pour $Zn\,Cl_2\,.\,3\,H_2\,O$, et, de mes propres observations, que tel doit être le cas aussi pour l'hydrate de Al_2Br_6 [2]) Récemment, j'ai trouvé une nouvelle indication de ce genre dans les recherches de M. Amat [3]) sur les phosphites. D'après lui (*l. c.* p. 300), en effet, le sel $Na\,H_2PO_3\,.\,2\frac{1}{2}\,H_2\,O$ peut aussi cristalliser de solutions contenant moins que $2\frac{1}{2}\,H_2\,O$. Comme

[1]) *Rec. Trav. Chim.*, T. V, p. 407 (1886).

[2]) *Rec. Trav. Chim.*, T. VIII, p. 268 (1889).

[3]) *Ann. de Chim. et de phys.*, nov. 1891.

d'ailleurs il offre un point de fusion à 42°, les deux parties de la courbe doivent nécessairement être réalisables pour ce sel.

Les deux branches de courbe ont aussi été trouvées chez des substances autres que les hydrates de sels. M. Stortenbeker [1]), au Laboratoire de Leiden, les a mises en évidence pour les combinaisons $I\,Cl$ et $I\,Cl_3$; M. Pickering [2]), qui avait connaissance de mon travail sur le chlorure de calcium, a montré chez les hydrates $SO_3 . 5\,H_2O$ et $SO_3 . 2\,H_2O$ l'existence de deux sortes de solutions, même sur un assez grand intervalle de température, et chez $SO_3 . H_2O$ il a déjà trouvé une indication de l'existence de la seconde branche de courbe. Il est très remarquable que les deux parties de la courbe relative à l'hydrate $SO_2 . 2\,H_2O$ avaient déjà été reconnues par MM. Pfaundler et Schnegg dans un travail datant de 1875, mais, depuis lors, étaient tombées dans l'oubli [3]).

Après ma première publication sur le sujet actuel M. Pickering a trouvé encore plusieurs exemples des deux branches chez les combinaisons des amines avec de l'eau (*Journ. Chem. Soc.* Jan 1893).

De l'exemple actuel, celui du chlorure ferrique, on peut inférer que l'existence de solutions plus pauvres en eau ne restera pas, chez les hydrates salins non plus, un phénomène

---

[1]) *Rec. Trav. Chim.*, T. VII, p. 152 (1888).

[2]) *Journ. Chem. Soc.*, T. LVII, p. 338 (1890).

[3]) *Wiener Sitzungsber.*, T. LXXI, p. 382. — M. Pickering ne fait pas mention de ce travail, bien que celui-ci contienne déjà en gros les mêmes résultats que le sien, sauf en ce qui concerne la courbe de $SO_3 . 5\,H_2O$, hydrate dont la découverte est due à M. Pickering. Le travail n'est pas mentionné non plus dans le *Lehrbuch* de Michaëlis (1878), ni dans le *Handwörterbuch* de Fehling (1890). Je l'ai trouvé cité d'abord dans la *Molekularphysik* de Lehmann, T. I, p. 743, et ensuite dans le nouveau *Handbuch* de Dammer (1892). M. Pfaundler hésitait encore un peu à affirmer que les deux parties de la courbe appartenaient au même hydrate $SO_3 . 2\,H_2O$, parce que les analyses des cristaux formés présentaient des différences assez notables, lorsque la composition de la solution s'éloignait de celle de l'hydrate pur. Le cas, resté isolé, n'attira pas l'attention et ne donna lieu à aucune vue plus générale.

tout à fait exceptionnel. Les hydrates à 12 et à 4 H_2O, plus spécialement, montrent la seconde branche de la courbe de solubilité sur un assez grand intervalle de température. Parmi les hydrates salins aisément solubles, il y en a donc sans doute encore beaucoup qui, étudiés systématiquement, présenteront cette seconde branche.

Le seul point qui ait prêté à discussion [1]) est la manière dont les deux branches de courbe se rencontrent au point de fusion. Tandis que, pour l'hexahydrate de chlorure de calcium, je les avais représentées comme formant ensemble une courbe continue, M. Le Chatelier pensait que les deux branches devaient, au point de fusion, se couper sous un angle.

L'étude des hydrates du chlorure ferrique ne donne pas lieu à rouvrir ce débat. Qu'au point de fusion il se dessine un angle ou bien une courbure, cela dépend beaucoup, en effet, du choix de l'échelle. Par suite de la discussion, nous avions donc été conduits, l'un et l'autre, à reconnaître que la question ne pouvait être résolue, avec une certitude entière, par la voie de l'expérience. Aussi, bien que la courbe de $Fe_2\,Cl_6\,.\,4\,H_2O$ rende de nouveau très probable l'existence d'une courbure au point de fusion, la preuve rigoureuse que le changement de direction y est continu et non pas brusque, me semble toujours résulter uniquement de la formule thermodynamique de van der Waals, d'après laquelle il doit y avoir, au point de fusion [2]), une tangente verticale.

M. Le Chatelier avait fait à cette formule quelques objections, que je crois avoir réfutées. La question de sa validité se trouvait ainsi ramenée à la question de la certitude des déductions thermodynamiques en général.

---

[1]) *Compt. rend.* T. CVIII, p. 565, 744, 801, 1013, 1015.

[2]) A proprement parler, le point de jonction est encore un peu différent du point de fusion. Dans la discussion il a aussi été tenu compte de cette circonstance J'espère y revenir sous peu, raison pour laquelle je n'insiste pas en ce moment.

Les doutes du savant français étaient fondés, en second lieu, sur la considération qu'au point de fusion de l'hydrate il se produirait un changement brusque du dissolvant. A cet égard non plus, je n'avais pu partager sa manière de voir.

Récemment [1]), cette dernière objection a de nouveau été réfutée en détail par M. Lorentz. Les deux courbes de solubilité pouvaient être regardées aussi comme les courbes des abaissements du point de fusion de l'hydrate, produits par l'addition de l'un des composants. Or, à ce point de vue, il semblerait que les deux courbes fussent indépendantes l'une de l'autre. Mais M. Lorentz a montré que les lois déduites pour l'abaissement du point de congélation cessent d'être applicables lorsque au corps fondant on ajoute l'un de ses éléments, parce qu'on ne peut attribuer à celui-ci une existence particulière à côté des molécules du corps fondu. Je crois donc pouvoir tenir pour définitivement acquis que, au point de fusion, il y a passage continu entre les deux branches de la courbe de solubilité.

III. Tableau général des courbes d'équilibre, tant stable qu'instable. Sursaturation.

En décrivant les déterminations de la solubilité, nous avons rencontré plusieurs courbes dont une des parties correspondait à un équilibre instable. Il nous reste donc encore à présenter un tableau d'ensemble des résultats expérimentaux, tant pour les équilibres stables que pour les instables.

Les équilibres stables entre les différents corps solides et les solutions sont représentés par la série des courbes enchaînées *A B C D E F G H I K L*.

Les différentes courbes *A B*, *B C D*, *D E F*, *F G H*, *H I K* et *K L*, correspondant aux solutions qui sont respectivement en équilibre avec la glace, $Fe_2\,Cl_6\,.\,12\,H_2O$, $Fe_2\,Cl_9\,.\,7\,H_2O$, $Fe_2\,Cl_6\,.\,5\,H_2O$, $Fe_2Cl_6\,.\,4\,H_2O$ et $Fe_2\,Cl_6$ anhydre, se joignent,

[1]) Voir le Mémoire de M. Stortenbeker: *Zeitschr. fur physik. Chem.*, T. X, p. 194.

deux à deux, dans les points *B*, *D*, *F*, *H*, *K*. Tous ces points ont une signification analogue. Non seulement ils représentent la composition des solutions qui peuvent être en équilibre simultané avec deux combinaisons solides se suivant dans la série, mais la composition en chacun de ces points est aussi intermédiaire entre celles des deux corps en question. C'est là une suite nécessaire de la circonstance qu'en ces points se rencontrent toujours la seconde branche de la courbe de solubilité de l'hydrate le plus élevé et la première branche de la courbe de solubilité de l'hydrate immédiatement inférieur. Lorsque, en effet, on prend pour première branche la partie de courbe qui correspond aux solutions contenant plus d'eau que le corps solide, et pour seconde branche la partie relative aux solutions contenant moins d'eau que ce corps, on peut aussi, dans la courbe générale des solubilités, considérer la courbe de la glace, *A B*, comme seconde branche, la courbe de $Fe_2\ Cl_6$ comme première branche. Seulement, dans ces deux derniers cas, les autres branches ne sont naturellement pas possibles.

En raison de la composition indiquée, les solutions correspondantes doivent, au-dessous des températures marquées par les points *B*, *D*, *F*, *H*, *K*, se solidifier en mélanges des deux corps qui, à cette température, peuvent coexister avec la solution, — la sursaturation supposée exclue.

D'après la composition de ces solutions telle qu'elle est donnée par le tableau, il s'opère donc, aux points en question, les transformations suivantes:

en B : $24.4 H_2\ O$ (glace) + $(Fe_2 Cl_6 . 12 H_2\ O) \leftrightarrows (Fe_2 Cl_6 \approx 36{\cdot}4 H_2 O)$

en D : $(Fe\ Cl_6 . 12 H_2\ O) + 3{\cdot}06\ (Fe_2\ Cl_6 . 7 H_2\ O) \leftrightarrows 4{\cdot}06\ (Fe_2\ Cl_6 \approx 8{\cdot}23\ H_2\ O)$

en F : $4{\cdot}14\ (Fe_2\ Cl_6 . 7 H_2\ O) + (Fe_2\ Cl_6 . 5 H_2\ O) \leftrightarrows 5{\cdot}14\ (Fe_2\ Cl_6 \approx 6{\cdot}61\ {}_2H\ O)$

en H : $11{\cdot}5\ (Fe_2\ Cl_6 . 5 H_2\ O) + (Fe_2\ Cl_6 , 4 H_2\ O) \leftrightarrows 12{\cdot}5\ (Fe_2\ Cl_6 \approx 4{\cdot}92\ H_2\ O)$

en K : $6\ (Fe_2\ Cl_6 . 4\ H_2 O) + Fe_2\ Cl_6 \leftrightarrows 7\ (Fe_2\ Cl_6 \approx 3{\cdot}43 H_2\ O)$

En soumettant une solution quelconque du chlorure ferrique à un refroidissement continu, on doit donc toujours arriver à l'une de ces températures de solidification complète sauf dans le cas où la solution a tout juste la composition de l'un des hydrates. Pour se faire une idée nette de la manière dont les différentes solutions se comportent, on n'a qu'à se figurer leur concentration et leur température données par l'un des points situés à droite de la chaîne des courbes. En cas de refroidissement, on parcourt alors d'abord une ligne horizontale de composition constante. A une température déterminée, cette ligne rencontrera l'une des courbes. En ce point, — sursaturation mise à part, — commencera la séparation du corps solide correspondant, laquelle se continuera, pendant qu'on suit la courbe du côté des températures plus basses, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au point extrême de la courbe, où apparaîtra encore un second corps solide. Si la solution initiale avait exactement la composition indiquée par l'un de ces points extrêmes, la solidification, naturellement, commencerait et s'achèverait à cette même température. Si elle avait, au contraire, tout juste la composition d'un hydrate, elle se solidifierait complètement à la température de fusion de celui-ci.

D'après la manière dont les choses ont été ci-dessus représentées (fig 1), il ne pourrait pas exister de solutions dont la composition et la température seraient exprimées par l'un des points situés à gauche de la chaîne des courbes. Mais, pour le sel en question, il y a aussi possibilité, dans une large mesure, de solutions instables, et nous trouvons donc ici des phénomènes de sursaturation extrêmement variés. Il y a des solutions qui sont sursaturées par rapport à un seul hydrate, — d'autres, qui le sont par rapport à plusieurs hydrates; — il y en a qui sont en équilibre avec un hydrate, mais sursaturées relativement à un second; — il y en a qui, la sursaturation détruite, se solidifient en partie, — d'autres, qui se solidifient entièrement.

Des faits du même genre ont été rapportés en détail dans mon Mémoire sur le chlorure de calcium [1]), et à cette occasion j'ai, pour la première fois, systématiquement coordonné les différents phénomènes de sursaturation. En considérant le point qui représente une solution de composition et de température données, et en appréciant correctement la situation de ce point par rapport aux parties des courbes d'équilibre stable ou instable, chacun peut aisément se faire une idée des phénomènes possibles pour cette solution.

Vu, toutefois, la circonstance que chez le chlorure ferrique les secondes branches des courbes de solubilité sont si nombreuses et si étendues, je ferai encore remarquer que les deux branches de chaque courbe embrassent entre elles tous les points qui représentent des solutions sursaturées par rapport à l'hydrate correspondant. Une droite horizontale, qui marque la composition de cet hydrate et conduit à son point de fusion, divise en deux parties l'espace circonscrit par la courbe: l'une de ces parties comprend les solutions dont la composition, après que la sursaturation a cessé, passe à l'une des compositions qui appartiennent à la première branche de la courbe de solubilité, — l'autre partie comprend les solutions dont la composition passe à l'une de celles que représente la seconde branche.

Cette remarque peut aider à bien comprendre les phénomènes, spécialement en arrière des points B, D, F etc., où les domaines des solutions sursaturées de deux hydrates empiètent l'un sur l'autre. La figure 2 (voir p. suivante) éclaircira la chose.

La droite QC représente la composition de l'hydrate $Fe_2\,Cl_6 \,.\, 12\,H_2O$ ($100\,H_2O.\ 8{,}33\,Fe_2\,Cl_6$), la courbe XE celle de $Fe_2\,Cl_6 \,.\, 7\,H_2O$ ($100\,H_2O.\ 14{,}3\,Fe_2\,Cl_6$). L'espace QCB embrasse donc des solutions qui ne sont sursaturées que par rapport à l'hydrate à $12\,H_2O$. C'est ainsi, par exemple, qu'une solution T pourra laisser déposer $Fe_2\,Cl_6 \,.\, 12\,H_2O$ jusqu'à ce

---

[1]) *Rec. trav. chim.* T. VIII. p. 36 et suiv.; *Arch. néerl.* T. XXIII, p. 239.

que, la température restant constante, sa composition ait atteint celle du point *U*. La figure indique également que les quantités de l'hydrate déposé et de la solution résultante sont entre elles comme *T U* : *T S*.

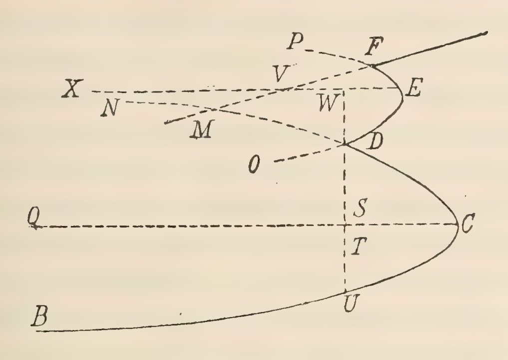


Fig. 2.

Pareillement, toutes les solutions de la région *Q C N* conduiront, par séparation de $Fe_2\ Cl_6 . 12\ H_2O$, à des points de la seconde branche de courbe *C N*. Mais, tandis que celles de la région *S C D* arrivent par cette séparation à un état stable, il n'en est pas de même des solutions de la région *Q S D N*. Celles-ci acquerront par dépôt de $Fe_2\ Cl_6 . 12\ H_2O$ une composition correspondant à quelque point de la courbe *DN*. Or, tous les points de la courbe *D N* se trouvent à l'intérieur de la région *X E O* des solutions qui sont saturées par rapport à $Fe_2\ Cl_6 . 7\ H_2O$.

Si cette dernière combinaison vient également à se déposer, il en résultera un changement de la solution dans la direction *D O*, et par suite une nouvelle séparation de $Fe_2\ Cl_6 . 12\ H_2O$. Le dépôt alternatif des deux hydrates conduira donc finalement à la solidification complète de la solution. Mais il y a aussi encore une différence entre les régions *QSDO* et *ODN*. Pour les solutions appartenant à la première de ces régions, il faut que d'abord se sépare l'hydrate douze, avant que puisse apparaître l'hydrate sept; pour les solutions de la seconde région, l'ordre de succession est arbitraire, vu que dès l'origine

elles sont déjà sursaturées par rapport à chacun des deux hydrates. Les solutions de la région $X W D N$, au contraire, doivent d'abord laisser déposer l'hydrate sept, avant de devenir sursaturées par rapport à l'hydrate douze. Toutes les solutions de la région $Q S D W X$ se solidifient finalement en un mélange des hydrates à 12 et à 7 H_2O. De l'autre côté de $X E$, il y aura entre les hydrates à 7 et à 5 H_2O des relations analogues à celles que nous venons de trouver, dans l'espace borné par $X E$ et $Q C$, entre les hydrates à 12 et à 7 H_2O. Jusqu'à quel point les régions d'instabilité sont réalisables en fait, l'expérience seule peut le faire connaître, et on ne saurait l'indiquer avec précision, vu que le début de la séparation d'un corps solide dépend de beaucoup de circonstances accidentelles.

De manière générale, toutefois, j'ai constaté que l'hydrate à 7 H_2O apparaît très difficilement. Grâce à cette circonstance, les courbes $F M$ et $D N$ des hydrates à 5 et à 12 H_2O ont pu être poursuivies assez loin pour qu'elles aussi se rencontrent encore, vers 15° environ, en un point qui correspond à la composition 100 H_2O ∺ 13,3 Fe_2Cl_6. En présence d'un pareil liquide peuvent donc coexister les hydrates à 5 et à 12 H_2O; au-dessous de 15°, il doit se solidifier en un mélange de ces deux hydrates, et inversement ceux-ci doivent, au-dessus de 15°, se liquéfier l'un l'autre.

Ce dernier phénomène avait déjà été observé accidentellement par M. Fritsche. On voit maintenant que la coexistence des hydrates à 5 et 12 H_2O au-dessous de 15° et leur liquéfaction au-dessus de 15° ont lieu seulement dans l'hypothèse que l'hydrate à 7 H_2O ne se produise pas, car le point d'intersection des courbes $F M$ et $D N$ est situé dans la région des solutions qui, normalement, doivent se solidifier en un mélange des hydrates à 7 et à 12 H_2O.

Autant que je sache, nous avons ici le premier exemple montrant que deux hydrates, qui ne se suivent pas immédiatement, peuvent exister ensemble à côté d'une solution, au

moins en équilibre instable. Ce fait était inconnu à M. Fritsche, qui par suite avait conclu, à tort, qu'entre ces deux combinaisons il n'y en avait pas d'autre. A l'occasion de mon travail sur le chlorure de calcium, j'ai discuté la possibilité de la coexistence, à l'état d'équilibre *stable*, de deux hydrates non consécutifs [1]).

Une place particulière est prise par les solutions correspondant à la région $X V M$. Comme la courbe des solutions saturées de l'hydrate cinq, continuée à partir de V vers le bas, conduit à des solutions contenant encore plus d'eau que l'hydrate sept, toutes les solutions de la susdite région sont sursaturées tant par rapport à l'hydrate à $5 H_2 O$ que par rapport à l'hydrate à $7 H_2 O$. S'il y a déjà présence du premier, et qu'à côté de lui apparaisse le second, il dépendra de la quantité de l'hydrate cinq que celui-ci reste avec l'hydrate sept ou bien ce dernier avec la solution, laquelle est alors encore sursaturée par rapport à l'hydrate douze.

Quelque chose d'analogue pourrait aussi se produire si la courbe $D N$, à des températures plus basses, franchissait la droite $X E$, et qu'ainsi devinssent possibles, en présence de l'hydrate à $12 H_2 O$, des solutions contenant encore moins d'eau que l'hydrate à $7 H_2 O$.

Finalement, encore une remarque sur la définition de la sursaturation. Pour embrasser aussi les solutions dont la composition, après que la sursaturation a cessé, est représentée par un point de la nouvelle courbe de solubilité, j'avais proposé la définition suivante [2]): „une solution est sursaturée à l'égard d'un corps solide, lorsque sa concentration est telle qu'elle peut exister en équilibre avec ce corps à une température plus élevée". M. Budde [3]), qui a donné un excellent résumé des vues nouvelles, fait observer, à ce sujet, que je n'avais

---

[1]) *Rec. Trav. Chim.*, T. VIII, p. 75 etc., *Arch. néerl.*, T. XXIII, p.280.
[2]) *Rec. Trav. Chim.*, T. VIII, p. 36; *Arch. néerl.*, T. XXIII, p. 239.
[3]) *Naturw. Rundschau*, 1892, p. 82.

pas tenu compte des cas où la solution saturée contient plus d'eau que le noyau solide et où la solubilité diminue à mesure que la température s'élève. L'objection est parfaitement fondée, et moi-même j'ai rencontré de pareils cas chez le sulfate de thorium [1]). Je puis donc très bien me rallier à la définition suivante, proposée par M. Budde: „une solution est saturée par rapport à un corps solide déterminé, lorsque, en contact avec ce corps à la température donnée, elle en laisse déposer une nouvelle quantité. Une pareille solution contient donc plus de sel que la solution saturée, quand celle-ci, à la même température, contient plus d'eau que le corps solide, et inversement."

Cette définition est l'expression la plus simple possible de ce fait: pour qu'une solution soit susceptible de laisser déposer un corps solide, il faut que sa composition soit intermédiaire entre celle de ce corps et celle de sa solution saturée à la température donnée.

IV. Pressions de vapeur.

La connaissance complète des équilibres demanderait encore une étude des pressions de vapeur des différents systèmes. Je n'ai pas fait, à ce sujet, des recherches aussi étendues que celles exécutées pour mon travail sur le chlorure de calcium; je me suis borné à une couple de déterminations à 15°. Par analogie, toutefois, avec les résultats obtenus dans le travail rappelé, il est facile de dresser, pour le cas actuel aussi, un schéma de l'allure des courbes représentant la pression de vapeur. Aux deux branches des courbes de solubilité d'un hydrate correspondraient de nouveau deux branches de la courbe des pressions de vapeur de sa solution saturée. Il n'est pas douteux non plus que la partie de courbe affectée aux solutions plus riches en eau présenterait pour tous les hydrates,

---

[1]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T. V, p. 198; *Arch. néerl.* T. XXIV, p. 233.

au voisinage du point de fusion, un maximum de pression, analogue à celui que j'ai observé pour la première fois chez le $Ca\,Cl_2 . 6\,H_2\,O$ [1]) et dont la situation était en accord avec la température à laquelle la chaleur de vaporisation de la solution saturée passe par zéro.

Aux températures B, D, F, H, K il y aurait non seulement rencontre des deux courbes de pression de vapeur pour les solutions saturées de deux corps solides, mais à partir de chacun de ces points s'étendrait vers le bas une troisième courbe, représentant les pressions de vapeur de ces deux corps solides dans le cas où ils sont présents tous les deux. Ce caractère aussi a été mis nettement en évidence par l'exemple du chlorure calcique.

Des mêmes points partiraient, en quatrième lieu, les courbes qui indiquent l'équilibre, à pression croissante, entre la solution et les deux corps solides. Vu que, dans nos exemples, quand on augmente la chaleur, il s'opère en tous les points une fusion simultanée des deux corps solides, et que ce phénomène est accompagné de dilatation, ces nouvelles courbes s'étendront toutes du côté des températures plus élevées [2]).

Ces points d'intersection sont donc de nouveaux exemples de points quadruples; c'est-à-dire, ils indiquent les seules températures et pressions auxquelles peuvent coexister quatre phases formées de $Fe_2\,Cl_6$ et H_2O. Les courbes s'appliquent chacune à trois phases; elles circonscrivent les différentes régions pour les systèmes possibles de deux phases. A raison du grand nombre des hydrates possibles, la représentation totale devient très compliquée.

---

[1]) *Rec. Trav. Chim.*, T. VIII, p. 58 et 100; *Arch. néerl.* T. XXIII, p. 261 et 306

[2]) Aussi, à proprement parler, les points d'intersection des courbes de pression ne concordent pas exactement avec ceux des courbes de solubilité. Les premiers correspondent à des températures un peu plus basses que les seconds, vu que ceux-ci indiquent l'égalité des solutions sous la pression atmosphérique, ceux-là, sous la pression de vapeur. La différence est toutefois très minime.

Je n'en donnerai qu'un seul exemple, en considérant les phénomènes qui se produisent à 15°, lorsque, partant d'une solution étendue de $Fe_2 Cl_6$, on lui enlève de l'eau par évaporation. A l'origine, la pression de vapeur de la solution différera peu de celle de l'eau pure. A mesure que la solution devient plus concentrée, sa pression de vapeur s'abaisse continûment. Lorsque le liquide a atteint la composition qui correspond au point de la courbe $B\ C$ donné par la température 15°, l'hydrate $Fe_2\ Cl_6 . 12\, H_2O$ commence à se former, et dès lors la pression de vapeur se maintient constante, jusqu'à ce que, par perte d'eau, la solution ait disparu tout entière et qu'il ne reste plus que l'hydrate en question.

Ensuite, la pression de la vapeur peut être diminuée au-dessus de l'hydrate solide, sans que celui-ci cède de l'eau, jusqu'à ce que soit atteinte la pression d'équilibre du mélange des hydrates à 12 et à 7 H_2O. Dès que, dans l'espace qui s'étend au-dessus de l'hydrate à 12 H_2O, la pression s'est abaissée au-dessous de la limite en question, $Fe_2 Cl_6 . 12\, H_2O$ se transforme en $Fe_2 Cl_6 . 7\ H_2O$. Durant cette transformation, la pression reste de nouveau constante. Ensuite, la pression peut recommencer à décroître jusqu'à une limite déterminée, où se forme $Fe_2 Cl_6 . 5\, H_2O$, puis, de même, jusqu'à la formation de $Fe_2 Cl_6 . 4\, H_2O$ et finalement de $Fe_2 Cl_6$ anhydre.

J'ai déterminé ces différentes limites de pression en introduisant les solutions ou hydrates respectifs, placés sur des verres de montre, dans des exsiccateurs qui contenaient de l'acide sulfurique à différents degrés de concentration et se trouvaient dans une chambre dont la température était maintenue constante à 15—16°. On trouve alors promptement la concentration à laquelle il n'est ni cédé ni absorbé de l'eau, et par conséquent la pression de vapeur de l'acide sulfurique qui est égale à celle du système dont il s'agit.

C'est ainsi qu'ont été obtenues les valeurs suivantes:

Système.	Pression de vapeur à 15°.
Première solution saturée de $Fe_2Cl_6.12\,H_2O$	mm 6,0
" " " " $Fe_2Cl_6.\ 7\,H_2O$	2,3
Mélange solide des deux hydrates	1,8
Seconde solution [1]) saturée de $Fe_2Cl_6.12\,H_2O$	1,4
Première " " " $Fe_2Cl_6.\ 5\,H_2O$	1,3

Dans ces expériences, il fut reconnu que le sel sec $Fe_2Cl_6\ .\ 12\,H_2O$, en perdant de l'eau, ne fournissait pas immédiatement $Fe_2Cl_6\ .\ 7\,H_2O$. Au lieu de cela, il y avait de nouveau liquéfaction, due à la formation de la seconde solution saturée (pression = 1mm,4). Une fois, cette solution se convertit au bout de quelque temps en mélange stable des hydrates à 12 et 7 H_2O, la pression remontant alors jusqu'à 2mm,3. Une autre fois, au contraire, l'hydrate douze se liquéfia complètement, après quoi commença aussitôt la cristallisation de l'hydrate cinq. La succession directe de ces deux derniers phénomènes s'explique par la circonstance qu'à 15° il y égalité presque parfaite, quant à la proportion de Fe_2Cl_6, entre la seconde solution de l'hydrate douze et la première solution de l'hydrate cinq (voir les courbes *DN* et *FM*).

En accord avec cette presque égalité de composition, la pression de vapeur de la dernière solution n'était aussi que de très peu (0mm,1) inférieure à celle de l'autre.

La conversion, par perte d'eau évaporée à la température ordinaire, de $Fe_2Cl_6.\ 12\,H_2O$ en $Fe_2Cl_6\ .5\,H_2O$, après liquéfaction préalable, a déja été observée par M. Fritsche. Bien que les considérations précédentes donnent la clef de l'explication, le phénomène n'en reste pas moins très remarquable.

---

[1]) C'est-à-dire: la solution, à 15°, qui appartient à la seconde branche de la courbe de solubilité.

Cela tient, en premier lieu, à ce que la seconde solution de l'hydrate douze et la première de l'hydrate cinq sont toutes les deux instables à 15°, et qu'ainsi il est mis en évidence que non seulement par refroidissement d'une solution, mais aussi par perte de vapeur à température constante, toutes sortes d'équilibres instables peuvent succéder l'un à l'autre.

En second lieu, on remarquera que de cette manière il peut aussi venir à manquer l'un des termes de la série des combinaisons solides. J'appelle d'autant plus l'attention sur ce point, que M. Lescœur a émis quelque doute [1]) quant à l'exactitude de mes observations sur le chlorure de calcium, vu que par perte de vapeur d'eau il était passé de $Ca\,Cl_2 . 6\,H_2O$ à $Ca\,Cl_2 . 2\,H_2O$, tandis que j'avais encore communiqué des pressions d'équilibre pour les hydrates à 6 et à 4 H_2O, et pour ceux à 4 et à 2 H_2O. Selon toute probabilité, il se produit donc chez les hydrates de chlorure de calcium quelque chose d'analogue à ce qui a lieu pour le chlorure ferrique [2]).

Ensuite, la manière dont le chlorure ferrique se comporte à 15° fournit un excellent moyen de démontrer sans peine l'existence de la seconde solution saturée. On n'a qu'à préparer, par mélange de $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$ et d'eau, la solution saturée ordinaire, et à l'exposer au-dessus de l'acide sulfurique concentré. La solution commence alors par se dessécher, puis, la perte d'eau continuant, se forme la seconde solution saturée.

S'il était commode d'opérer de la même manière à des températures supérieures, on pourrait observer des phénomènes encore plus remarquables, surtout entre 30° et 32°. Entre ces limites, par soustraction de vapeur d'eau à une solution

---

[1]) *Ann. de Chem. et de Phys.* 6e sér., T. XIX, p. 335.

[2]) On voit aussi de nouveau que l'étude des solutions saturées reste la meilleure méthode pour trouver les hydrates existants. Une fois que ceux-ci et leurs rapports mutuels ont été découverts, la méthode de l'exposition au-dessus d'acides sulfuriques de concentrations différentes offre un moyen commode pour déterminer les pressions de vapeur des divers systèmes à la température ordinaire.

étendue, il y aurait d'abord dessiccation et formation de $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$, ensuite déliquescence, puis deuxième dessiccation avec formation de $Fe_2Cl_6 . 7\,H_2O$, nouvelle déliquescence, et enfin troisième dessiccation donnant naissance à $Fe_2Cl_6 . 5\,H_2O$; la suite entière de ces phénomènes correspondrait à des états stables.

A la température ordinaire, la proportion d'eau ne descend pas au-dessous de $5\,H_2O$, pas même en présence de l'acide sulfurique concentré et dans l'espace de plusieurs semaines, ainsi que je m'en suis assuré par l'analyse de la masse sèche. On peut en conclure que la conversion de $Fe_2Cl_6 . 5\,H_2O$ en $Fe_2Cl_6 . 4\,H_2O$ n'a lieu que lorsque la pression de vapeur tombe au-dessous de $0^{mm},1$. Ce dernier hydrate, ni surtout le chlorure anhydre, ne sauraient donc être obtenus par la dessiccation à la température ordinaire, à moins qu'il n'existe des corps attirant l'eau avec encore plus d'avidité.

Finalement, il n'est pas difficile de déduire, de ce qui précède, la manière dont les hydrates et leurs solutions se comporteront à l'air ordinaire des chambres. A 15°, la pression de la vapeur d'eau, à l'état de saturation, est de 12^{mm}. Tant que l'air de la chambre sera plus qu'à demi saturé, ce qui est le cas habituel, tous les hydrates et toutes leurs solutions saturées attireront de l'eau, les plus pauvres en eau en attirant le plus. Rarement on peut voir $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$ rester sec. $Fe_2Cl_6 . 5\,H_2O$ se convertit ordinairement d'abord en solution, puis en $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$, de sorte que l'hydrate à $7\,H_2O$ est alors de nouveau franchi. $Fe_2Cl_6 . 7\,H_2O$ peut ou bien tomber en déliquescence et se changer en solution, ou bien — ce qui arrive fréquemment — se convertir directement en $Fe_2Cl_6 . 12\,H_2O$.

V. Chaleur de dissolution.

Dans tout l'intervalle thermique sur lequel s'étendent les déterminations de la solubilité, il a été reconnu, pour tous les hydrates du chlorure ferrique, que la solubilité augmente

avec la température. Cela s'applique non seulement aux solutions riches en eau, mais aussi à celles qui sont plus pauvres; car, bien que chez ces dernières la proportion de Fe_2Cl_6 décroisse lorsque la température s'élève, ce phénomène implique naturellement que l'hydrate lui-même, dont il s'agit, se dissout de plus en plus à mesure que monte la température. On peut en conclure, thermodynamiquement, que pour tous les hydrates la chaleur de dissolution doit être négative.

Par chaleur de dissolution il faut entendre ici la chaleur mise en jeu lorsque l'hydrate en question se dissout dans une quantité infiniment grande de sa solution saturée. Quant au développement historique de cette notion, je renvoie à mon Mémoire sur le chlorure de calcium [1]). La valeur ainsi définie ne pouvant être déterminée expérimentalement, j'ai montré, dans le travail cité [2]), comment on peut la construire au moyen de la représentation graphique des chaleurs de dissolution, prises en fonction de la teneur en eau de la solution produite. J'avais désigné par Q_c^x la chaleur de dissolution d'un hydrate salin à c mol. H_2O dans $(x - c)$ mol. d'eau, et par $Q_c^{\infty x}$ sa chaleur de dissolution dans une quantité infinie de solution à $x\,H_2O$. Lorsqu'on connaît les valeurs Q_c^x pour deux valeurs de x rapprochées, la valeur $Q_c^{\infty x}$ peut naturellement en être déduite aussi par le calcul. Cette voie a été récemment suivie par MM. van Deventer et van de Stadt [3]), qui ont calculé pour plusieurs sels la valeur $Q_c^{\infty x}$, x représentant la teneur en eau de la solution saturée à 18°.

La construction graphique, toutefois, est non seulement plus simple, mais permet aussi de reconnaître, d'un seul coup d'œil, si les signes des deux chaleurs de dissolution — qu'à l'exemple des auteurs cités j'appellerai chaleur intégrale de dissolution (Q_c^x) et chaleur théorique de dissolution ($Q_c^{\infty x}$) —

---

[1]) *Rec. Trav. chim.*, T. VIII, spécial. p. 125; *Arch. neerl.*, T. XXIII, p. 326.
[2]) *Rec. Trav. chim.*, T. VIII, p. 124; *Arch. néerl.*, T. XXIII, p. 331.
[3]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T. IX, p. 43.

concordent ou non. J'ai fait voir, dans le travail ci-dessus rappelé, que chez quelques sels il peut y avoir des différences dans le signe des deux valeurs, et comment ces différences sont déterminées par la forme et la situation de la courbe qui représente les chaleurs de dissolution Q^x_c.

Le chlorure de calcium en offrait déjà des exemples. L'hydrate $Ca\,Cl_2\ 2H_2O$ a des valeurs négatives pour la chaleur intégrale de dissolution lorsque $x < 4$, des valeurs positives lorsque $x > 4$. Mais la chaleur théorique de dissolution reste encore négative pour des valeurs plus grandes de x, bien que la limite ne soit pas exactement connue. Chez $Ca\,Cl_2 . 4H_2O$ les valeurs de Q^x_4 sont négatives pour $x < 12$, positives pour $x > 12$, on peut toutefois déduire de la courbe que $Q^{\infty\,x}_4$ est déjà négative pour $x < 19$. J'avais dès lors énoncé la présomption que de pareilles différences se rencontreraient chez d'autres sels formant des hydrates, spécialement chez leurs hydrates les plus pauvres en eau, la probabilité étant grande que la chaleur intégrale de dissolution changerait du positif au négatif en passant par zéro, lorsque la quantité d'eau employée à la dissolution serait suffisamment réduite.

Peu de temps après, MM. Reicher et van Deventer[1]) découvrirent un nouvel exemple chez le chlorure cuivrique. La chaleur intégrale de dissolution de l'hydrate $Cu\,Cl_2 . 2H_2O$ fut trouvée par eux négative pour $x < 13$, positive pour $x > 13$. De la courbe qui représente leurs déterminations des valeurs Q^x_2, je déduis que $Q^{\infty\,x}_2$ est déjà négative pour $x <$ env. 30.

Aussi bien pour les hydrates du chlorure de calcium que pour l'hydrate du chlorure de cuivre, les solutions saturées connues possèdent des valeurs x telles, que les valeurs correspondantes de $Q^{\infty\,x}_c$ sont négatives. Par là elles vérifient cette loi thermodynamique, que ces chaleurs de dissolution doivent être négatives lorsque la solubilité croît avec la température.

Après cette digression, nécessaire pour l'interprétation cor-

[1]) *Zeitschr. f. physik. Chem.*, T. V., p. 559.

recte des choses, revenons au chlorure ferrique, qui présente des phénomènes analogues. Le chlorure ferrique anhydre et tous ses hydrates donnent une élévation de température lors de leur dissolution dans une grande quantité d'eau [1]). Par contre, d'après la loi thermodynamique, la chaleur théorique de dissolution, $Q_c^{\infty\, x}$, devrait, pour toutes les valeurs x observées chez les différentes solutions saturées, être négative. Il s'agissait de savoir si cette conclusion se laisserait confirmer expérimentalement. J'ai pu m'assurer, d'une manière très simple, qu'il en est réellement ainsi: à la température ordinaire, on constate très facilement, pour les hydrates à 12, 7 et $5H_2O$, que la chaleur de dissolution diminue continûment lorsque augmente la teneur en chlorure ferrique de la solution, que cette chaleur devient nulle pour une concentration déterminée, et négative pour une concentration encore plus forte.

J'ai cherché, — en déterminant la richesse de deux solutions dont l'une produisait encore une chaleur sensible, l'autre déjà du froid, quand on y introduisait l'hydrate, — à évaluer plus ou moins la concentration pour laquelle la chaleur de dissolution est nulle.

Cette méthode ne peut naturellement donner que des valeurs approchées, vu que la concentration change au cours de la dissolution.

Hydrate introduit.	Teneur en eau de la solution.	Phénomène thermique.	La solution saturée à 15°contient:
$Fe_2Cl_6 . 12H_2O$	99 H_2O	donne un peu de chal. +	21 H_2O
	64 »	» » » » » −	
$Fe_2Cl_6 . 7H_2O$	14 »	» » » » » +	9 H_2O
	12.2 »	» » » » » −	
$Fe_2Cl_6 . 5H_2O$	15.5 »	» » » » » +	7.5 H_2O
	10.1 »	est thermiquem. neutre.	
	8.4 »	donne un peu de chal. −	

[1]) M. Thomsen a trouvé pour le chlorure anhydre: $(Fe_2Cl_6, 2000\,H_2O) = +63{,}4$ grandes calories.

La solution qui est thermiquement neutre pour $Fe_2 Cl_6.12 H_2 O$ contient donc environ 80 $H_2 O$. Sa teneur en eau ne se laisse déterminer, par une expérience grossière, que de façon très incertaine, attendu que, dans cette solution diluée, l'action thermique de l'hydrate douze est très faible. Dans les solutions renfermant moins de 80 $H_2 O$ cet hydrate se dissout en fixant de la chaleur, et tel est donc aussi le cas pour la solution saturée à la température ordinaire, solution qui contient 21 $H_2 O$.

La chaleur de dissolution dans la solution saturée est donc en accord avec l'accroissement de la teneur en $Fe_2 Cl_6$ de la solution à mesure que la température s'élève.

Il en est de même pour les hydrates à 7 et à 5 $H_2 O$. Leurs chaleurs de dissolution deviennent négatives lorsque les teneurs en eau des solutions s'abaissent au-dessous d'environ 13 et 10 $H_2 O$, tandis que leurs solutions saturées à 15° contiennent respectivement 9 et 7,5 $H_2 O$. La loi thermodynamique se trouve donc vérifiée aussi pour ces hydrates. En même temps, ceux-ci constituent un exemple, facile à démontrer, du changement de signe que la chaleur de dissolution éprouve quand la concentration de la solution varie.

Résumé des résultats.

1. Il existe quatre hydrates du chlorure ferrique, contenant respectivement 12, 7, 5 et 4 molécules d'eau.

2. Les hydrates à 7 et à 4 H_2O sont nouveaux ; la composition de celui à 5 $H_2 O$ a, pour la première fois, été établie avec certitude.

3. Les points de fusion des quatre hydrates ont été fixés à 37°, 32°,5, 56°, 73°,5. Au-dessous de ces points de fusion, ils peuvent tous être en équilibre tant avec des solutions plus

pauvres en eau, qu'avec des solutions plus riches. Ces solutions saturées forment deux branches de la courbe de solubilité, lesquelles, au point de fusion, passent insensiblement l'une à l'autre.

4. Les courbes des solutions plus riches en eau d'un hydrate rencontrent, à des températures déterminées, les courbes des solutions plus pauvres en eau de l'hydrate immédiatement supérieur. A ces températures, les solutions se solidifient en mélanges des deux hydrates. Dans les mélanges extrêmes apparaissent la glace et le chlorure ferrique anhydre. Les températures de solidification sont: — 55°, 27°,4, 30°, 55°, 66°.

5. Il peut se produire des phénomènes de sursaturation très variés, dont les particularités se laissent déduire de la considération des différentes régions circonscrites par les courbes de solubilité.

6. Les pressions de vapeur ont été déterminées, à 15°, pour différents systèmes, tant stables qu'instables; elles rendent compte des phénomènes qu'on observe lors de la dessiccation et lors de l'exposition à l'air.

7. Les chaleurs de dissolution, à 15°, des hydrates à 12, 7 et 5 H_2O passent du positif au négatif quand la concentration de la solution augmente progressivement. Les chaleurs de dissolution dans la solution saturée ont des valeurs négatives et sont par conséquent en accord thermodynamique avec l'accroissement de la solubilité à mesure que la température s'élève.

Les tableaux suivants donnent un aperçu des valeurs obtenues dans les différentes déterminations.

Compositions des solutions saturées.

n' = nombre des mol. Fe_2Cl_6 sur 100 mol. H_2O,
n'' = " " " H_2O " 1 " Fe_2Cl_6.

Glace.

t	n'	n''
0°	0	∞
−10°	1.00	100
−20°.5	1.64	61
−27°.5	1.90	52.6
−40°	2.37	42.2
env. −55°	env. 2.75	env. 36.4

$Fe_2Cl_6.7\,H_2O$

t	n'	n''
20°	11.35	8.81
27°.4	12.15	8.23
32°	13.55	7.38
32°.5	14 29	7.00
30°	15.12	6.61
25°	15.54	6.47

$Fe_2Cl_6.5H_2O$.

t	n'	n''
12°	12.87	7.77
20°	13.95	7.17
27°	14.85	6.73
30°	15.12	6.61
35°	15.64	6.40
50°	17.50	5.71
55°	19.15	5.22
56°	20.00	5.00
55°	20.32	4.92

$Fe_2Cl_6.4H_2O$.

t	n'	n''
50°	19.96	5.01
55°	20.32	4.92
60°	20.70	4.88
69°	21.53	4.64
72°.5	23.35	4.28
73°.5	25.00	4.00
72°.5	26.15	3.82
70°	27.90	3.58
66°	29.20	3.43

$Fe_2Cl_6.12H_2O$.

t	n'	n''
−55°	env. 2.75	env. 36.4
−41°	2.81	35.6
−27°	2.98	33.6
0°	4.13	24.2
10°	4.54	22.0
20°	5.10	19.6
30°	5.93	16.9
35°	6.78	14.8
36°.5	7.93	12.6
37°	8.33	12.0
36°	9.29	10.8
33°	10.45	9.57
30°	11.20	8.92
27°.4	12.15	8.23
20°	12.83	7.80
10°	13.20	7.57
8°	13.70	7.30

Fe_2Cl_6 anhydre.

t	n'	n''
66°	29.20	3.43
70°	29.42	3.40
75°	28.92	3.46
80°	29.20	3.43
100°	29.75	3.33

Points de fusion.

$Fe_2Cl_6 . 12\, H_2O$	37°
$Fe_2Cl_6 . \ 7\, H_2O$	32°.5
$Fe_2Cl_6 . \ 5\, H_2O$	56°
$Fe_2Cl_6 . \ 4\, H_2O$	73°.5
Glace + Fe_{12} [1]	env. — 55°
$Fe_{12} + Fe_7$	27°.4
$Fe_7 + Fe_5$	30°
$Fe_{12} + Fe_5$ (instable)	env. 15°
$Fe_5 + Fe_4$	55°
$Fe_4 + Fe_0$	66°

Chaleur de dissolution.

Hydrate introduit.	Teneur en eau de la solution.	
	chal. positive.	chal. négative
Fe_{12}	$> 80\, H_2O$	$< 80\, H_2O$
Fe_7	$> 13\, H_2O$	$< 13\, H_2O$
Fe_5	$> 10\, H_2O$	$< 10\, H_2O$

Pression de vapeur à 15°.

	mm de mercure
Fe_{12} avec solution plus riche en eau	6.0
Fe_7 〃 〃 〃 〃 〃 〃	2.3
Fe_{12} avec Fe_7.	1.8
Fe_{12} avec solution plus pauvre en eau	1.4
Fe_5 avec solution plus riche en eau	1.3

[1]) Par abréviation, pour $Fe_2Cl_6 . 12\, H_2O$ etc.

LEIDEN, Labor. de chim. inorg. de l'université.

SUR
L'ORIGINE DE LA FORCE MUSCULAIRE

PAR

TH. W. ENGELMANN.

En essayant, dans les pages suivantes, de résoudre le vieux problème de l'origine de la force musculaire, je suis parti de cette proposition que la source primordiale de cette force est située dans la combustion physiologique (dédoublement, oxydation) de substances musculaires et que la transformation de l'énergie potentielle chimique en énergie mécanique (tension élastique, travail mécanique) s'effectue selon la loi de la conservation de l'énergie. Si, à l'égard de la vérité de ces principes, il n'existe aucune différence d'opinion, celle-ci se manifeste d'autant plus dès qu'il s'agit d'indiquer par quelles voies l'énergie chimique, qui disparaît dans le muscle par suite de l'excitation, se change en force de contraction; si cette transformation s'effectue directement par l'attraction chimique, ou bien par l'intermédiaire de la chaleur, de l'énergie électrique, ou par plusieurs de ces agents en même temps.

Plusieurs physiologistes paraissent considérer la première de ces voies comme la plus probable. Dans son célèbre mémoire sur la combustion dans les organismes vivants, M. Pflüger [1]) indique cette manière de voir. M. Ad. Fick [2])

---

[1]) *Archiv für die ges. Physiologie* etc. de E. Pflüger, Tome X 1875 p. 329 et 641.

[2]) A. Fick, *Mechanische Arbeit und Wärmeentwickelung bei der Muskelthätigkeit*, Leipzig 1882, p. 158.

s'exprime dans le même sens, lorsque de certains faits et de considérations thermodynamiques il conclut: „les forces d'attraction chimiques doivent d'avance être plus ou moins prédisposées dans le sens de l'action mécanique à produire, et doivent y participer directement." M. A. Chauveau [1]) par ses profondes études sur le travail musculaire est conduit à la conclusion: „la contraction musculaire est une dérivation directe du travail chimique." Tout récemment, M. Max Verworn [2]), se fondant sur des observations faites sur le protoplasme contractile, a proclamé l'affinité chimique comme étant généralement la cause mécanique directe de tous les phénomènes de contraction et a tâché de confirmer sa thèse par l'examen de cas particuliers de mouvement animal de diverses formes, tels que le mouvement du protoplasme, des cils vibratiles et des muscles.

A mon avis, toute hypothèse de cette nature est sujette à cette objection fondamentale que dans chaque contraction ce n'est qu'une fraction relativement infiniment petite de la substance musculaire qui est chimiquement active. Le muscle consiste, pour 70 à 80 pour cent, en eau, pour le reste en substances (albumine, sels, etc.) dont de beaucoup la plus grande masse ne participe pas chimiquement au raccourcissement. Ce ne sont donc que relativement très peu de molécules qui peuvent être considérées comme sources d'énergie. Et de celles-là ce n'est encore, en général, qu'un nombre très faible qui entre en action au même moment; elles sont loin d'agir toutes simultanément. Posons, par exemple, que dans une contraction déterminée le muscle s'échauffe de 0°,001; si nous attribuons à sa chaleur spécifique une valeur exagérée, égale à celle de l'eau, la quantité de chaleur nécessaire à cette élévation de température a été de 0,001 calories par gramme de substance, et il est démontré qu'elle doit provenir d'ac-

---

[1]) A. Chauveau, le travail musculaire et l'énergie qu'il représente. Paris, 1891, p. 324.

[2]) Max Verworn, *die Bewegung der lebendigen Substanz*, Jena, 1890.

tions chimiques. Or, si l'on calcule la quantité de matière qui a suffi pour produire cette chaleur, on arrive, soit qu'on suppose l'oxydation ou le dédoublement d'hydrates de carbone, de graisses ou de corps albumineux, à ce résultat que l'énergie nécessaire à la contraction n'a été fournie que par une fraction tout à fait insignifiante de la masse musculaire. Dans le cas, par exemple, de la combustion d'un hydrate de carbone en CO_2 et H_2O, dont on peut évaluer la production de chaleur à 4000 calories, il aurait suffi de $\frac{1}{4000}$ miligramme [1]).

Quelle que soit la représentation qu'on puisse raisonnablement se faire sur la forme, la grandeur, la sphère d'action, l'état de mouvement et sur la position spéciale de ce quatre-millionnième par rapport à la masse aqueuse environnante, qu'on doit considérer comme inerte, — je ne saurais me figurer comment, par *attraction chimique directe*, cette particule unique arriverait à mettre en mouvement les 3 999 999 autres.

Mon opinion à cet égard n'a pas changé, maintenant que M. Ad. Fick [2], ensuite de mes objections, a dépeint plus en détail comment on doit se représenter le processus de la contraction, lorsque „les forces chimiques d'attraction, rangées dans le sens du raccourcissement musculaire, entrent directement en action mécanique". Il dit: „Dans les fibres musculaires il se trouve de petits disques de conformation cristalloïde, séparés par des intervalles et rangés l'un au-dessus de l'autre Nous nous figurerons maintenant à la face inférieure de chaque petit disque un atome de carbone C, à la face supérieure un atome d'oxygène O, et cela, d'abord, dans une position telle que l'attraction chimique proprement dite entre l'atome O de l'un des disques et l'atome C du disque

---

[1]) M. Ad. Fick (*Mechanische Arbeit und Wärmeentwickelung bei der Muskelthätigkeit*, Leipzig 1882, p. 223) calcule, d'une manière analogue, qu'une contraction énergique n'exige, pour produire l'effet intégral, que la combustion de 0,0006 mg. d'hydrate de carbone, ou de 0,00025 mg. de graisse par gramme de muscle.

[2]) Pflügers *Archiv*, Tome 53 (1893), p. 611.

qui lui est superposé ne peut pas encore se manifester. L'atome O pourrait, par exemple, se trouver au centre de la face supérieure, tandis que l'atome C de la face inférieure serait placé plus de côté. Supposons maintenant que, par suite de l'excitation, la molécule à laquelle appartient l'atome C soit déplacée transversalement, de manière que celui-ci se trouve perpendiculairement au dessus de l'atome O du disque suivant et, par suite, tellement rappoché de ce dernier que la violente attraction chimique des atomes C et O entre en fonction. Comme ces atomes sont chimiquement liés aux autres atomes de leurs disques, et que ces disques sont aussi des corps mécaniquement assez fixes, l'attraction ne produira pas, comme cela serait le cas chez des atomes libres, une vive oscillation autour de leur centre de gravité commun, c'est-à-dire, de la chaleur, mais l'atome C supérieur et l'atome O inférieur entraîneront leurs disques respectifs, de sorte qu'ils se rapprocheront en chassant au dehors le liquide intermédiaire. Comme la masse des disques excède, — peut-être de plus d'un million de fois, — celle des atomes qui s'attirent, la vitesse du mouvement sera très faible par rapport à celle des oscillations thermiques, mais elle ne sera pas insensible, parce que, justement, l'attraction chimique a une intensité énorme. Si l'on se représente que cette même action a lieu dans chaque paire de disques, on voit que toute la colonne des disques doit se contracter et que les fibres musculaires doivent se raccourcir."

On peut, à mon avis, difficilement prouver d'une manière plus démonstrative l'impossibilité mécanique de cette théorie qu'il ne l'est fait dans les phrases citées de leur éminent champion. En effet, cette représentation du mécanisme de la contraction repose entièrement sur la supposition, tout à fait inadmissible, que les disques hypothétiques (dont l'existence réelle est d'ailleurs démentie par les faits et lois morphologiques) ne sont pas seulement des corps *assez* fixes, comme le le veut M. Fick, mais *absolument* fixes et rigides. Sans cela, il est

évident que les disques ne pourraient que courber l'une vers l'autre les portions pour ainsi dire infiniment petites de leurs surfaces, où se trouvent logés les atomes O et C qui s'attirent. Pour expliquer la grandeur possible de la contraction, qui pour chaque portion du muscle peut atteindre 95 pour cent et plus, il faudra nécessairement admettre que la hauteur des disques est très petite en comparaison de la distance extrêmement faible, d'ordre moléculaire, à laquelle s'exercent les attractions des atomes C et O. Dans la position d'équilibre, elle doit, en tout cas, être moindre qu'un vingtième de cette distance. Comme l'attraction chimique, ainsi que paraît le reconnaître M. Fick, n'entre en jeu qu'entre des parties excessivement petites, que l'on peut évaluer à un millionnième ou moins de la masse totale, la hauteur des disques doit être pour ainsi dire infiniment petite par rapport à leur rayon, ce qui revient à admettre qu'ils sont infiniment flexibles. Un raccourcissement sensible ne peut donc nullement se produire, quelle que soit l'intensité que l'on veuille attribuer aux forces d'attraction chimique.

Ces remarques, d'ailleurs, sont bien loin d'épuiser les arguments que l'on peut produire contre la théorie de l'attraction chimique, et nous nous abstenons de lui reprocher qu'elle ne tient pas compte de la structure fibrillaire des appareils contractiles, de la différenciation des fibrilles en sections isotropes et anisotropes, des variations de sens contraires, en volume, en forme, en pouvoir réfringent, en extensibilité, etc., des couches uniréfringentes et biréfringentes, de la diminution du volume du muscle entier, du raccourcissement thermique des fibres, même à l'état mort (voir ci-dessous), et de plusieurs autres faits avec lesquels elle est en contradiction ou ne peut être mise en accord forcé qu'au moyen d'hypothèses auxiliaires plus ou moins invraisemblables.

On pourrait accorder une probabilité bien plus grande à une deuxième hypothèse, indiquée déjà par J. Rob. Mayer [1]),

---

[1]) J. R. Mayer, *Die organische Bewegung in ihren Zusammenhang*

qui fait dériver la force musculaire de *la chaleur* développée dans la combustion physiologique, c'est-à-dire d'une transformation d'énergie chimique en énergie mécanique, de même nature, en principe, que la transformation qui s'opère dans les machines à vapeur ou les moteurs caloriques.

Je ne puis considérer, avec M. Solvay [1]), comme une objection décisive à cette manière de voir, le fait que le muscle travaille plus économiquement qu'aucun moteur thermique construit par l'homme jusqu'à ce jour. D'abord, le progrès dans la construction des machines caloriques a diminué les différences qui existaient sous le rapport du coefficient économique entre ces moteurs et les muscles, et d'ailleurs ces différences ne sont guère d'un autre ordre que celles qui existent entre les machines thermodynamiques de diverses espèces. D'autre part, le muscle, appareil dont le combustible brûle à l'intérieur ou au voisinage immédiat des particules qui effectuent le travail mécanique, se trouve peut-être dans des conditions beaucoup plus favorables à la transformation d'énergie calorique en travail mécanique que nos machines de fer, dans lesquelles l'échauffement et le refroidissement doivent avoir lieu sur de grandes masses à des distances macroscopiques. En tout cas, le muscle présente des conditions différentes, nullement comparables à celles de nos machines, et on peut bien en toute confiance attribuer à la nature la faculté de réaliser, par une évolution qui a duré des milliers de siècles, plus de progrès que l'esprit humain n'en a pu faire, pour l'application du même principe de transformation, dans le court espace de temps écoulé depuis l'invention de James

---

mit dem Stoffwechsel, 1845, dans: *die Mechanik der Wärme*, Stuttgart 1867, p. 99.

[1]) Dr Paul Héger, *Le programme de l'Institut Solvay.* Bruxelles 1891. Je cite d'après un article publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* par M. Fredericq qui, de son côté, doute de la justesse des déductions de M. Solvay.

Watt. Le biologiste trouvera ses raisons de juger autrement que l'ingénieur.

Beaucoup de physiologistes croient toutefois, avec M. Ad. Fick [1]), devoir rejeter l'origine thermique de la force musculaire, comme étant incompatible avec la seconde loi fondamentale de la thermodynamique. D'après eux, des différences de température, telles que cette loi les exige, ne pourraient être admises dans les muscles.

Pour des raisons théoriques aussi bien qu'expérimentales, cette objection me semble dépourvue de toute valeur; je comprends même difficilement qu'elle ait pu être soulevée.

Pour tous ceux qui ne se l'étaient pas encore dit à eux-mêmes, M. E. Pflüger a proclamé dès 1875, de la manière la plus nette et la plus énergique „que la température dite inférieure du corps n'est qu'une moyenne arithmétique, embrassant une infinité de températures extrêmement différentes, particulières à une infinité de points différents d'un même organe"; et plus loin: que les molécules formées par la combustion physiologique possèdent, du moins à l'instant de leur naissance, une température énorme, qu'elles perdent toutefois bientôt, en cédant de la chaleur à la matière, plus froide et riche en eau, qui les entoure.

En ce qui concerne spécialement les muscles, les déductions de M. Pflüger sont confirmées par le fait, cité plus haut, que la combustion d'une quantité relativement infinitésimale de molécules suffit déjà à produire la contraction d'un muscle entier; de ce fait il résulte, en effet, que la température de ces molécules doit être, au moment de la combustion, excessive-

---

[1]) A. Fick, *Mechanische Arbeit und Wärmeentwickelung bei der Muskelthätigkeit*, p. 153–160. („Nachweis dass der Muskel nicht nach Art einer thermodynamischen Maschine wirkt"). — Comparer aussi p. 24 du *Lehrbuch der Physiologie* de Gad et Heymans, Berlin, 1892.

[2]) E. Pflüger, *Nachtrag zu meinem Aufsatz über die physiologische Verbrennung in den lebendigen Organismen.* Pflüger, *Archiv*, T. X, 1875, p. 642.

ment élevée, „si élevée, que l'exiguïté et le petit nombre de ces sources calorifiques sont peut être les seules causes qui nous empêchent de les voir briller." [1]) S'il n'en était pas ainsi, une élévation de température du muscle total, fût-elle seulement de 0°,001, resterait inexplicable, vu la grande chaleur spécifique de la substance musculaire. [2]) Chaque particule thermogène étant entourée d'une masse conductrice et diathermane relativement immense et de température beaucoup plus basse, la condition la plus générale pour la conversion de la chaleur en travail mécanique se trouve donc remplie, et cela, à cause de l'énorme valeur des différences de température à admettre, de la manière la plus parfaite. Ce qui est vrai de l'organisme entier s'applique aussi, en principe, au muscle: on peut „le comparer à une grande maison contenant des chambres très nombreuses, et qui serait chauffée par des foyers extrêmement petits, placés dans quelques-unes de ces pièces seulement et allumés temporairement, l'un après l'autre". [3]) Pourquoi la

---

[1]) Th. W. Engelmann, *Les bactéries pourprées et leurs relations avec la lumière. Arch. néerl.*, T. XXIII, 1889, p. 190. Il y a bien des années déjà, j'ai observé dans l'obscurité, espérant les voir dégager peut-être une trace de lumière, des muscles de grenouilles et de lapins, mis dans l'état tétanique le plus violent; mais cette expérience n'a donné aucun résultat. Je n'ai pas davantage réussi à rendre lumineuse la rétine par une violente excitation électrique (directe ou appliquée au nerf optique).

[2]) Par un travail tout récent de M. Fr. Schenck, *Ueber die Summation der Wirkungen von Entlastung und Reiz*, etc. (Pflüger, *Archiv*, T. 53, 1893, p. 409), j'apprends que M. A Jarolimek (*Ueber die Mechanik des Muskels*, dans: *Die Natur*, 1887), se fondant sur quelques expériences de MM. Pettenkofer et Voit relatives aux échanges nutritifs, a calculé quc le chute de température qui doit avoir lieu dans le muscle en action, considéré comme machine thermodynamique, est de 173° C. L'idée que M. Jarolimek se fait du mode spécial de conversion de la chaleur en travail me paraît, d'après les indications de M. Schenck, tenir trop peu de compte des faits, pour qu'il soit nécessaire d'y insister ici. Il ne m'a pas encore été possible, malheureusement, de me procurer le Mémoire original.

[3]) *Les bactéries pourprées*, etc. *l. c.*, p. 191.

chaleur de ces foyers ne pourrait-elle être utilisée à faire mouvoir des machines, à produire du travail mécanique?

L'objection [1]) que les températures excessivement élevées, qu'il faudrait ainsi admettre, constitueraient un danger pour la vie du muscle, et même la détruiraient, puisque le muscle devient déjà rigide par une chaleur de 40°—50° C, cette objection, dis-je, me semble également infirmée par les considérations précédentes: les particules dont l'altération ou la destruction entraîne la „mort du muscle" peuvent, en effet, être tout autres que celles qui produisent la chaleur et le travail, et se trouver hors de l'atteinte de ces hautes températures. Des faits qui seront rapportés plus loin [2]), viennent directement à l'appui de cette hypothèse; ils mènent à la conclusion que les particules considérées comme le siège des forces contractiles du muscle ne deviennent pas inactives par la chaleur, mais qu'elles conservent encore leur pouvoir de contraction à des températures dépassant de 50°, et plus, celle où le muscle, pris dans son ensemble, meurt instantanément.

Néanmoins, si probable qu'il puisse être que la Nature met ces conditions favorables à profit pour produire de l'énergie mécanique dans le muscle, — la preuve que cela a réellement lieu, et de quelle manière cela a lieu, n'a pas été fournie jusqu'ici.

Or, par les considérations et les expériences dont il va être question, je crois pouvoir donner cette preuve, en tant qu'elles feront voir comment, au moyen des dispositions matérielles existant dans le muscle, une transformation d'énergie chimique en travail mécanique, par l'intermédiaire de la chaleur, peut et doit s'y effectuer.

Je dois d'abord rappeler les résultats de recherches antérieures sur la structure des muscles et sur la nature du processus de la contraction.

---

1) Fr. Schenck, *l. c.* p. 412.

2) Voir l'Appendice VI. Comparer aussi les importantes recherches de M. W. Biedermann, citées plus loin.

Toutes les substances contractiles figurées contiennent, comme constituant essentiel, des éléments biréfringents uniaxes positifs. On a pu le constater [1]) pour les rayons protoplasmiques de l'*Actinosphaerium*, pour le protoplasme subcuticulaire du *Stentor* et du *Trachelocerca olor*, pour le muscle du pédicule et les myophanes du mésoplasme des Vorticellines, pour les cils contractiles, les styles, les crochets, les soies et les membranelles des Infusoires ciliés, pour les cils vibratiles et les lamelles vibratiles des cellules épithéliales et des spermatozoïdes, pour les éléments musculaires lisses et à stries transversales de tous les animaux examinés sous ce rapport.

La contractilité et la biréfringence se montrent au même moment du développement [2]): l'une et l'autre, par exemple, dans le muscle cardiaque du poulet, le second jour de l'incubation, dans les muscles du tronc et de la peau, du cinquième au sixième jour; dans les muscles du tronc et de la queue des têtards de grenouille, quand le corps a atteint $3-4^{mm}$ de longueur; dans les muscles masticateurs et les muscles cutanés des larves des mouches, plusieurs heures avant l'éclosion et avant que les stries transversales deviennent distinctes; dans le muscle pédiculaire des Vorticellines, les organes vibratiles des infusoires, dès la première apparition de l'organe, etc.

Là où, comme dans les fibres musculaires striées en travers, des couches biréfringentes alternent avec des couches monoréfringentes, les différences qu'on observe, lors de la contraction, quant aux changements d'aspect des deux couches, nous apprennent que les couches biréfringentes, en tout cas, doivent être le siège de forces raccourcissantes [3]). Comme d'ailleurs,

---

[1]) Th. W. Engelmann, *Contractilität und Doppelbrechung*, dans Pflüger, *Archiv*, T. XI (1875), p. 432 fig. – *Onderzoek.*, etc (3) T. III, Utrecht 1875, p. 1.

[2]) Pflüger, *Archiv*, T. XI, p. 442, 454, 556 et suiv.

[3]) Th. W. Engelmann, *Mikroskopische Untersuchungen über die quergestreifte Muskelsubstanz.* Second article. Pflüger, *Archiv*, T. VII, 1873, p. 162 et suiv. – *Onderzoek.* etc. (3), T. II, 1873, p. 145 et suiv.

dans presque tous leurs caractères (optiques, mécaniques, chimiques), les couches isotropes se distinguent d'une manière très frappante, et pas simplement quantitative, des couches anisotropes, que, des unes aux autres, lors de la contraction, beaucoup de ces caractères changent en sens opposé, et que tous les phénomènes relatifs à l'acte de la contraction se laissent expliquer dans l'hypothèse que les couches isotropes ne sont pas activement contractiles, — on peut conclure, avec un haut degré de probabilité, que les parties anisotropes sont les seules, dans le muscle strié, qui jouissent de la faculté de raccourcissement.

En outre, dans tous les éléments morphologiques contractiles, la direction du raccourcissement coïncide avec celle de l'axe optique, et cela — fait particulièrement remarquable — même dans les cas où, comme chez les fibres musculaires à stries obliques, l'axe morphologique et l'axe optique des fibrilles contractiles ont des directions différentes [1]).

Enfin, en général, la force du raccourcissement est visiblement d'autant plus grande que le pouvoir biréfringent est plus intense, l'un et l'autre étant rapportés à des couches de même épaisseur.

Tous ces faits non seulement permettent, mais obligent de conclure que *les éléments biréfringents doivent seuls être regardés, dans les muscles, comme le siège des forces raccourcissantes.*

Antérieurement déjà [2]), j'ai montré que des formes fondamentales organisées, non vivantes, non „irritables" (fibrilles du tissu connectif, de la cornée, membranes cellulaires), qui

---

[1]) Th. W. Engelmann, *Ueber den fasrigen Bau der contractilen Substanzen, mit besonderer Berücksichtigung der doppelt schräg gestreiften Muskelfasern*, dans *Onderzoek.* etc. (3), T. VI, 1881, p 325; Pflüger, *Archiv.* T. XXV, 1880, p. 538.

[2]) *Onderzoek.* etc. (3) II, 1873, — III, 1875. — Pflüger, *Archiv*, VII, p. 177, — VIII, p. 95, — XI, p. 460. — L. Hermann, *Handbuch der Physiol.*, I, Art. *Protoplasmabewegung*, p. 379. — Et particulièrement: *Ueber Bau, Contraction etc. der quergestreiften Muskelfasern*, dans *Compt. rend. du Congrès internat. de médecine*, Amsterdam, 1879, p. 574.

sont biréfringentes à un axe positif, peuvent également, sous certaines influences, se contracter, avec épaississement simultané, dans la direction de l'axe optique, et cela avec une force, une rapidité et une amplitude souvent égales, ou même supérieures, à celles des muscles. La même faculté de contraction a ensuite été trouvée par M. V. von Ebner [1]) chez de nombreux autres éléments histologiques à double réfraction uniaxe positive, voire même chez des substances susceptibles d'imbibition (par ex. des membranes colloïdes desséchées) rendues artificiellement biréfringentes, et par M. L. Hermann [2]) chez des filaments de fibrine. Dans tous ces cas, la direction du raccourcissement est, comme pour les muscles, celle de l'axe optique.

La conclusion, qu'*entre le pouvoir biréfringent et la faculté de raccourcissement des corps susceptibles d'imbibition il existe généralement une relation de cause à effet*, s'impose donc en quelque sorte.

Chez tous les objets examinés, le changement caractéristique de la forme se produit lorsque la proportion d'eau change dans les parties biréfringentes. En particulier, le raccourcissement est lié à l'absorption d'eau (gonflement par imbibition), l'allongement à la perte d'eau (resserrement par désimbibition). L'étendue, la force, la rapidité etc. du changement de forme dépendent, toutes choses égales d'ailleurs, tant de la nature de la substance susceptible d'imbibition que de la nature et de la concentration du liquide absorbé [3]).

Or, au moment de la contraction physiologique, — comme

---

[1]) V. von Ebner, *Untersuchungen über die Ursachen der Anisotropie organisirter Substanzen*, Leipzig, 1882. Ce travail hors ligne est loin d'avoir obtenu jusqu'ici, de la part des physiologistes, l'accueil qu'il méritait.

[2]) L. Hermann, *Handbuch der Physiologie*, I, 1879, p. 253.

[3]) On trouvera, à ce sujet, des données spéciales dans l'Appendice à ce Mémoire, paragraphes I, II et VI; en outre, dans Pflüger, *Archiv*, T. VII. p. 95 et suiv., et *Compt. rend du Congr. internat. de méd.* etc., p. 576 et suiv. Voir aussi V. von Ebner, *l. c.*, p. 50—55 (tendons), p. 53 (os), p. 73 (cartilage), p. 77 (capsule cristalline et cornée).

je l'ai trouvé il y a 20 ans et comme, depuis lors, il a été vérifié itérativement [1]), — les couches biréfringentes des muscles striés en travers, gonflées par absorption d'eau, font saillie en dehors des couches à réfraction simple, en même temps qu'elles deviennent moins réfringentes et plus extensibles. On était donc autorisé à regarder le raccourcissement physiologique comme dû essentiellement à un processus d'imbibition. Que dans les détails cette „*théorie de l'imbibition*" s'harmonise avec les faits, qu'elle rend compte aussi de phénomènes non observables au microscope et restés jusqu' alors complètement inexplicables, tels que la diminution de volume du muscle total pendant la contraction, c'est ce que j'ai essayé de montrer dans des travaux antérieurs et ce qui est aujourd'hui assez généralement reconnu. Elle a encore reçu une belle confirmation du fait, simplement présumé par moi [2]), mais démontré de la façon la plus nette par M. Ebner [3]), de la diminution de la biréfringence lors de la contraction non isométrique du muscle.

J'avais laissé de côté, à cette époque, les processus qui donnent lieu aux changements de l'état d'imbibition. En faisant de cette omission un reproche à la théorie, on a méconnu qu'elle se proposait seulement de rendre plus intelligible le *mécanisme* du raccourcissement, en le ramenant à un phénomène qui se produit aussi dans les corps inertes et morts. Ce but atteint, la tâche du physiologiste, en tant qu'elle concernait simplement l'acte mécanique, pouvait être regardée comme terminée en principe. Relativement aux questions de savoir quels processus mettent ce mécanisme en action et

---

[1]) Il n'est peut-être pas superflu de rappeler que les plus importants des faits relatifs à cette question se laissent constater sur des fibres musculaires vivantes d'Insectes, et non pas seulement sur des ondes de contraction „fixées", dont la force démonstrative a été récemment mise en doute, — sans raison suffisante, à mon avis.

[2]) Pflüger, *Archiv.*, T. VIII. 1872, p. 174.

[3]) V. Ebner, *l. c.*, 1882, p. 88–98.

comment, en particulier, la force du raccourcissement dérive de la force de tension chimique qui disparaît par suite de l'excitation, je m'étais borné à cette remarque très générale que probablement ce serait à l'étude chimique d'intervenir ici.

Sur ces questions, laissées sans réponse, je vais maintenant tâcher de jeter quelque jour.

Les forces chimiques dégagées dans le muscle par l'excita-peuvent se faire valoir mécaniquement de différentes manières.

D'abord, par des changements *matériels*, savoir, par des changements dans la composition chimique du milieu aqueux qui enveloppe et pénètre les particules contractiles biréfringentes, *en tant que de cette composition dépend très sensiblement l'état d'imbibition de ces particules.* De pareils changements ont lieu sans nul doute, comme le montrent le changement découvert par M. Helmholtz [1]) dans la proportion des extraits aqueux et alcoolique, et, d'une manière particulièrement frappante, l'acidification des muscles en travail, observée par M. E. du Bois-Reymond [2]). On pourrait être tenté, par exemple, d'attribuer un rôle à la formation de l'acide lactique, qui effectivement prend naissance dans le processus en question. Beaucoup d'éléments histologiques biréfringents, et spécialement les disques transversaux des fibres musculaires, même après avoir été tués par l'alcool ou par des températures suffisamment élevées, se gonflent déjà, avec raccourcissement considérable, sous l'action de solutions d'acide lactique très diluées [3]). On observe des raccourcissements de 50% [4]). Quant au rallongement, on pourrait vouloir le rapporter à

---

[1]) H. Helmholtz, *Ueber den Stoffverbrauch bei der Muskelaction*, dans Joh. Müller, *Archiv für Anat. u. Phys.*, 1845, *p.* 72.

[2]) E. du Bois-Rlymond, *De fibrae muscularis Reactione ut Chemicis visa est acida. Berolini* MDCCCLIX. — *Monatsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. Sitz. v.* 31 *März* 1859.

[3]) Voir, pour plus de détails, l'Appendice, Tabl. I*a*,

[4]) *Compt. rend. du Congrès internat. de méd.*, 1879, p. 566.

la neutralisation de l'acide par le suc alcalin qui se trouve en quantité relativement grande dans le muscle, ou même à la simple diffusion. Dernièrement, en effet, j'ai trouvé qu'à des fibres gonflées et raccourcies, même fortement et depuis plusieurs jours, on peut, au moyen de la neutralisation ou par de simples lavages, restituer complètement leurs longueur et épaisseur initiales [1]). Comme les distances dont il s'agit lors de ces mouvements de liquides dans le muscle, sont excessivement petites, en tout cas beaucoup moindres, généralement, qu'un micron, la rapidité avec laquelle s'effectuent souvent le raccourcissement et le relâchement n'aurait rien de surprenant. L'influence accélératrice et retardatrice que l'augmentation et la diminution de la chaleur exercent respectivement sur la marche de la contraction, de même que beaucoup d'autres faits encore, se laisseraient également très bien comprendre à ce point de vue. On oublierait ainsi, toutefois, que la force du raccourcissement ne provient pas tant de la formation de l'acide lactique, mais plutôt de l'acte chimique qui fournit l'acide carbonique. L'énergie potentielle consommée dans la formation de l'acide lactique ne saurait expliquer la grandeur du travail accompli [2]).

Cette difficulté disparaîtrait si l'on voulait mettre le gonflement sur le compte de l'eau produite par la combustion physiologique. Mais, alors même, ne serait pas encore expliquée le provenance de l'énergie dépensée au dehors, sous la forme de chaleur et de travail mécanique. En effet, pour toute quantité d'énergie potentielle qui disparaît lors du gonflement des couches biréfringentes, il doit évidemment disparaître, lors de la cession de l'eau imbibée, une quantité équivalente d'énergie actuelle. Pour l'action au dehors, il ne resterait donc rien.

---

[1]) Voir les chiffres des Tabl. I*b* et I*c* de l'Appendice.

[2]) Comp. G. Bunge, *Lehrb. d. physiol. u. path. Chemie*, 1887, p. 348 et suiv.

A part cela, d'ailleurs, toute tentative d'expliquer la contraction par de simples changements de la composition chimique me paraît rencontrer une difficulté fondamentale dans le nombre relativement infinitésimal des molécules chimiquement actives. On ne conçoit pas comment, par des changements des conditions d'imbibition en un point unique, infiniment petit, situé au milieu d'une énorme masse aqueuse et molle, cette masse entière pourrait être violemment amenée à une forme nouvelle.

Aucune de ces difficultés ne se rencontre lorsque la cause de la production d'énergie mécanique par changement de l'état d'imbibition est cherchée dans un autre effet du processus chimique, effet de nature non matérielle, mais dynamique, à savoir, dans *l'élévation de température.*

Tout aussi généralement que par des changements de la composition chimique du liquide qui les baigne et les pénètre, *on peut par une élévation de température provoquer dans tous les éléments biréfringents susceptibles d'imbibition, spécialement dans tous les uniaxes positifs, le développement de forces qui conduisent à leur raccourcissement caractéristique.*

Sur ce fait, depuis lors confirmé par M. L Hermann [1]) pour les filaments de fibrine et par M. von Ebner [2]) pour de nombreuses substances organisées, j'ai attiré l'attention dès mon premier travail sur la contraction musculaire [3]), et là, comme dans plusieurs occasions postérieures, j'ai signalé les nombreuses et frappantes analogies que les phénomènes en question présentent avec ceux qu'on observe lors de l'imbibition et de la contraction physiologique dans les couches biréfringentes des fibres musculaires.

Le raccourcissement se produit — comme l'apprennent le mieux des observations sur les tissus connectifs à fibres parallèles, les tendons par exemple — dans la direction de l'axe

---

[1]) L. Hermann, *Handb. d. Physiol.*, I. 1879, p. 252

[2]) *l. c.*, p. 55 et suiv. (tendons), p. 63 (os), p. 76 (capsule cristalline), etc.

[3]) Pflüger, *Archiv*, T. VII, 1872, p. 177.

optique, et il est accompagné d'épaississement perpendiculairement à cet axe, de diminution du pouvoir réfringent, de diminution de la biréfringence et d'augmentation de l'extensibilité. Tous ces changements, comme aussi la force, la rapidité et l'étendue du raccourcissement, sont absolument du même ordre que les changements correspondants observés lors de l'imbibition, et spécialement ceux éprouvés, lors du raccourcissement physiologique [1]) par les couches biréfringentes des muscles striés transversalement. C'est ce qui rend déjà probable qu'on doit les ramener essentiellement, comme ces derniers, à une imbibition des parties anisotropes. Mais alors cette „imbibition thermique" doit dépendre, ce qui d'ailleurs résulte aussi déjà des expériences de M. Rollett [2]), d'un enveloppement de la substance solide par l'eau, opéré à l'intérieur des faisceaux de fibres biréfringentes ou à l'intérieur de ces fibres elles-mêmes, et non d'une absorption d'eau du dehors [3]). Pour les questions à résoudre ici, nous n'avons toutefois pas à insister sur ce point, vu que, provisoirement, il a un intérêt plutôt physique que physiologique. Ce qui importe actuellement, c'est que chez tous les corps biréfringents susceptibles d'imbibition, même chez ceux qui sont privés de vie, une élévation de température détermine le développement de forces conduisant au changement caractéristique de la forme.

La température à laquelle le raccourcissement commence à devenir sensible, — pour abréger nous la nommerons la *température de début*, — dépend, à charge et à section trans-

---

[1]) Comp. les données numériques des paragraphes II, III et IV de l'Appendice.

[2]) A. Rollett, *Untersuchungen über die Structur des Bindegewebes*, dans *Sitzgsber. d. K. Akad. d. Wiss. in Wien*, T. XXX, 1859.

[3]) Pflüger, *Archiv*, T. VII, p. 177. — Comp. aussi V. von Ebner (*l.c.* p. 55 et 233 et suiv.), qui se rallie à cette interprétation du raccourcissement thermique comme phénomène analogue à l'imbibition, et qui développe des considérations très dignes d'attention sur la connexion des propriétés optiques et mécaniques.

versale égales, de la nature spécifique de la substance susceptible d'imbibition et de celle du liquide qui la baigne. Les influences déshydratantes, telles que la dessiccation, le traitement par l'alcool, par la glycérine concentrée, par une très forte solution de sucre, élèvent la température de début; les influences favorables à l'imbibition, comme l'action de l'eau distillée et surtout celle des acides étendus (acides lactique, acétique, chlorhydrique, etc.) et des alcalis caustiques l'abaissent, et il en est de même, — nouvelle analogie importante entre l'influence de la chaleur et celle de l'imbibition „chimique", — de l'action de températures supérieures. Tandis que dans l'état initial, sous les conditions normales d'imbibition, la température de début se trouve pour la plupart des objets, en l'absence de charge, entre 40° et 70°, elle peut dans le premier des cas susdits monter bien au-dessus de 100°, dans le second, tomber bien au-dessous de 15° C [1]). — Elle augmente, en outre, avec la charge: le développement de forces raccourcissantes plus grandes exige donc des températures plus hautes [2]). Il en résulte que la valeur du raccourcissement (le travail mécanique) croît, jusqu'à une certaine limite, avec la température absolue. A chaque degré déterminé de température correspond, toutes choses égales d'ailleurs, un degré déterminé de raccourcissement [3]).

D'un autre côté, la force raccourcissante produite par une élévation déterminée de température croît avec la charge exactement comme l'énergie mécanique développée dans le muscle par une excitation déterminée, et aussi, d'après des expériences faites à ce sujet, comme le développement de force

---

[1]) Voir les données numériques des tableaux III*a*, III*b* et IV de l'Appendice; aussi celles qu'on trouve déjà dans: Th. W. Engelmann, *Bemerkungen zur Theorie der Sehnen- und Muskelverkürzung* (Pflüger, *Archiv*, T. VIII, 1873, p. 95 et suiv.).

[2]) Voir l'Appendice, Tabl. III*c* et IV.

[3]) Voir l'Appendice, fig. 3 et Tabl. II. — En outre; Pflüger, *Archiv*, T. VIII, p. 96.

correspondant à une absorption déterminée de liquide à température constante [1]).

Lors du refroidissement, il s'opère, en même temps que les propriétés optiques et élastiques éprouvent un changement inverse du premier, un rallongement de la substance [2]), à ce point, comme de nouvelles expériences me l'ont appris, que *la longueur primitive peut être complètement restituée par simple refroidissement.*

Ce fait de la réversibilité complète a une importance fondamentale, ainsi qu'on le verra tout à l'heure.

Quand la chaleur a été trop forte, les propriétés élastiques ont subi une modification permanente, il subsiste un *raccourcissement résiduel*, dont la valeur dépend en chaque cas de la hauteur de la température atteinte et aussi, quoique dans une moindre mesure, de sa durée [3]).

La courbe d'extensibilité des parties raccourcies par voie chimique ou thermique s'abaisse, comme pour le muscle, plus rapidement vers les abscisses des charges que ne le fait celle des parties non ou moins raccourcies. Lorsque la charge dépasse une certaine limite, les raccourcissements, ainsi que le résidu du raccourcissement, peuvent, de même que dans le cas d'imbibition chimique, devenir négatifs. Dans certaines circonstances, les deux courbes finissent par se couper [4]). On sait que Ed. Weber [5]), en opérant sur des muscles de grenouille vivants, fatigués et fortement chargés, a aussi observé plus d'une fois, lors de l'excitation, un léger allongement.

Une matière se prêtant extrêmement bien à l'étude de ces importants phénomènes nous est fournie par les cordes de boyau des violons, lesquelles, comme on sait, sont formées de faisceaux

---

[1]) Voir l'Appendice, IV.

[2]) Pflüger, *Archiv*, T. VIII, p. 96 — Voir, en outre, les données numériques de l'Appendice, II.

[3]) Voir l'Appendice, Tabl. II et fig. 3.

[4]) Voir l'Appendice, IV, V et fig. 4.

[5]) Article *Muskelbewegung* du *Handwörterb. d. Physiol.* de R. Wagner, T. III, 1846, p. 46 et suiv.

de fibres parallèles de tissu conjonctif (séreuse intestinale), faiblement contournés en spirale autour de l'axe de la corde. Ces cordes se distinguent avantageusement de la plupart des objets naturels d'espèce analogue, par leur forme très régulièrement cylindrique et leur élasticité partout sensiblement la même. Ce sont ces qualités qui les rendent précieuses dans l'art musical, notamment pour ce qu'on appelle la pureté des quintes. Pour nous, il est particulièrement important que, lors de l'imbibition, leur forme reste beaucoup plus régulière que celle d'autres corps (des tendons, par exemple). A cette place, toutefois, je n'entrerai pas dans des détails ni dans la discussion des résultats variés que m'ont déjà donnés d'assez nombreuses recherches sur cette matière. On trouvera dans l'Appendice quelques-uns des principaux. Ici, je me bornerai essentiellement à décrire une expérience qui, au point de vue des questions dont il s'agit, me semble très instructive. Elle rend en effet sensible aux yeux, d'une manière très simple, que dans le muscle de l'énergie mécanique peut être produite, conformément à la loi de Carnot-Clausius, par la chaleur, sans que l'ensemble du muscle éprouve, quant à sa température, autre chose qu'une élévation à peine appréciable.

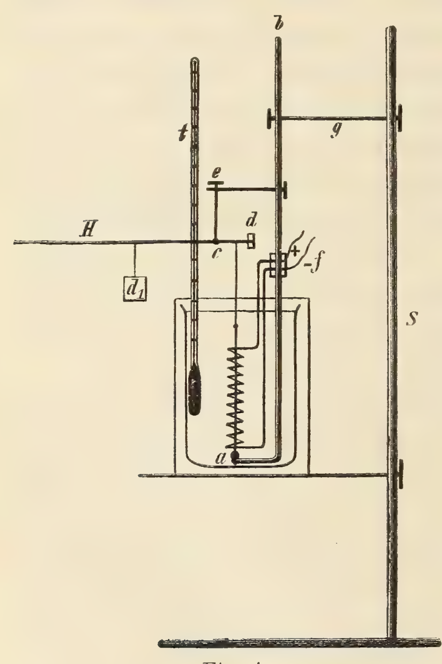


Fig. 1.

La figure ci-contre représente schématiquement, au tiers environ de la grandeur naturelle, le dispositif de l'expérience.

Un bout d'une corde *mi* de violon, long d'environ 5^{cm}, imbibé d'eau, est fixé par l'une de ses extrémités dans une pince ou une anse qui se trouve à l'extrémité *a* du bras court, non flexible, de la tige en acier *ab*; l'extrémité supérieure de ce bout de corde tire, par l'intermédiaire d'un court et solide fil de soie et d'un crochet métallique, à l'un des bras du levier *H*, mobile autour de l'axe horizontal *c*. Au moyen d'un petit poids curseur *d* et de poids d_1 à suspendre au long bras de levier, ou bien au moyen d'un ressort en acier agissant sur le levier, on peut donner à la corde toute tension voulue et réaliser, en changeant les points d'application, toutes les conditions entre l'isotonie aussi parfaite que possible, d'une part, et l'isométrie aussi parfaite que possible, de l'autre. La pointe du levier en aluminium, très léger et long de 25^{cm}, se meut devant un arc de cercle ou peut tracer une courbe sur le papier glacé et enduit de suie d'un cylindre tournant. Le coussinet *c* se laisse remonter et abaisser au moyen de la vis *e*, et il est en outre mobile le long de la tige *ab*, sur laquelle une vis permet de l'arrêter à la hauteur voulue. Autour et très près de la corde, mais sans la toucher, s'enroule, en faisant environ 15 circonvolutions, une spirale de mince fil de platine, longue de 20^{mm} et large de 3^{mm}. Les extrémités de cette spirale sont soudées à des fils de cuivre plus épais, qui, isolés par des manteaux de verre, se rendent à deux vis de serrage, fixées dans la pièce d'ébonite *f*, mobile sur la tige *ab*, et qui peuvent être reliées aux pôles d'une pile de 2 ou plusieurs grands éléments de Grove ou de Bunsen. En descendant, le long du support principal *S*, le bras solide *g*, on introduit la tige *ab*, avec le levier, la corde et la spirale qu'elle porte, dans un large et court tube d'essai, d'environ 50^{cm} de capacité, rempli d'eau jusque près du bord. Dans ce tube plonge aussi un thermomètre *t* marquant les degrés entiers, lequel est placé de façon que son réservoir reste à environ 0,5 à 1^{cm} de la spirale.

La corde, soumise à une tension de 25—50^{gr}, est d'abord

observée pendant plusieurs minutes, jusqu'à ce que la pointe du levier cesse de s'abaisser sous l'action de l'„élasticité résiduelle", après quoi on élève la température du vase, dans le cours d'environ 5 minutes, jusqu'à 40°, puis, lentement, jusqu'à environ 50°. Pendant cet échauffement, l'extrémité du levier ne s'abaisse que peu, ou demeure immobile. Si alors, ou même déjà auparavant, on fait passer pendant quelques secondes le courant par la spirale, *le levier se relève immédiatement avec une assez grande vitesse, pour redescendre bientôt après que le circuit a été rompu. Le thermomètre plongé dans le tube ne marque aucune élévation de température, ou une élévation à peine perceptible.*

On le voit: notre corde de violon biréfringente est la particule biréfringente qui fournit la force mécanique du raccourcissement, — l'*inotagma*, d'après la terminologie que j'ai proposée antérieurement [1]) — ; le tube rempli d'eau est la substance musculaire ambiante, aqueuse et isotrope; la spirale de platine remplace les molécules excitables, chimiquement actives, *thermogènes;* la fermeture du courant galvanique représente le processus de l'excitation de l'élément musculaire.

Lorsque la première fermeture du circuit n'a produit qu'un faible raccourcissement, la pointe du levier ne s'abaisse pas lors de la rupture, ou ne s'abaisse que de très peu. Le rallongement, à la suite du refroidissement, s'opère au contraire d'une manière très complète quand la corde, par une application unique ou répétée d'une chaleur plus forte, a été raccourcie et gonflée d'une façon notable et durable.

Laisse-t-on s'inscrire le raccourcissement sur un cylindre à rotation modérément rapide, on obtient des courbes qui ressemblent, à s'y méprendre, à des courbes de contraction musculaire, et qui sont effectivement prises, par tout physiologiste qui en ignore l'origine, pour des myogrammes. Un

---

[1]) Article „*Protoplasmabewegung*" du *Handbuch der Physiologie* de L. Hermann, T. I, 1879, p. 374.

pareil „chordogramme" présente (voir fig. 2), tout comme une vraie courbe de contraction physiologique: 1) un stade d'énergie latente, dont la durée diminue (fig. 2, I*a* et *b*) avec l'intensité de l'excitation (intensité du courant, durée du passage), augmente quand la charge croît et quand la température ambiante s'abaisse; 2) un stade d'énergie croissante,

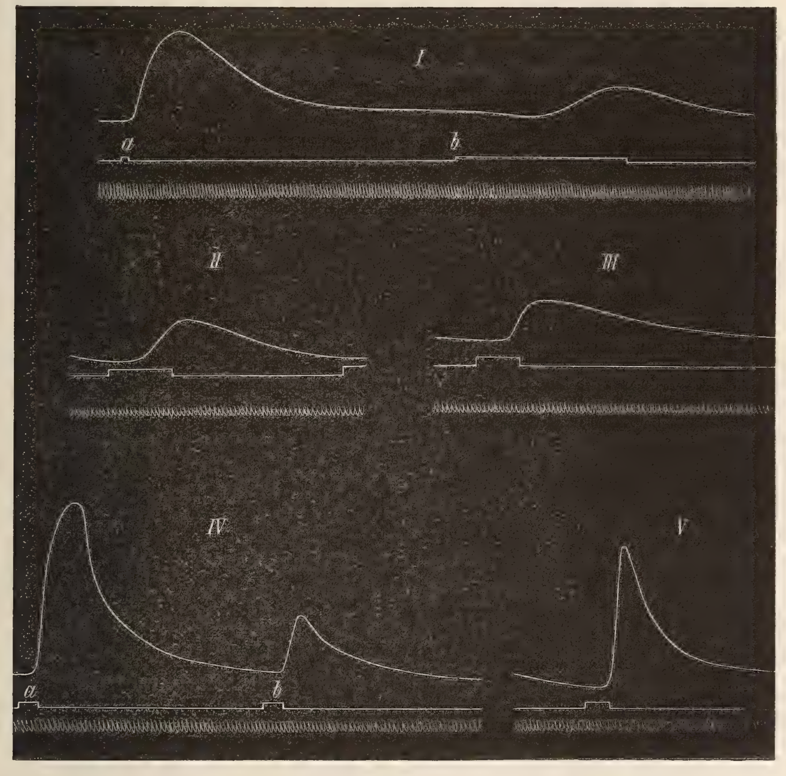


Fig. 2.

où le raccourcissement s'opère avec une rapidité d'abord croissante puis décroissante, et où la courbe présente une inclinaison d'autant plus forte et s'élève d'autant plus haut que l'excitation est plus énergique (fig. 2, I*a*, *b* et IV*a*, *b*) et la charge plus faible; ce stade passe directement (sans plateau) au stade 3), stade d'énergie décroissante, durant lequel la corde se relâche

avec une vitesse d'abord croissante puis décroissante, d'autant plus rapidement que le refroidissement est plus rapide (fig. 2, II, III, IV, V) et d'autant plus complètement que la charge était, entre certaines limites, plus grande et que la corde a moins dépassé un degré de chaleur déterminé, situé au-dessus de la température de début du raccourcissement.

Les courbes reproduites en grandeur originelle dans la fig. 2 ont toutes éte tracées, sons une charge de 50^{gr} et à l'aide d'un levier amplifiant 50 fois, par le même bout, long d'environ 20^{mm} et épais de $1^{mm},3$, d'une corde *mi* de violon, gonflée dans l'eau et ayant subi, par plusieurs courts chauffages au-dessus de la température de début, un raccourcissement durable. Sur la ligne moyenne est inscrite la durée du passage du courant et par conséquent la durée du chauffage électrique ; sur la ligne inférieure est marqué le temps, en vibrations de diapason, chacune de $\frac{1}{2}$ seconde.

I. *Différences d'allure de la contraction, suivant la rapidité plus ou moins grande de chauffage:* en *a* un courant intense passe pendant très peu de temps, en *b* un courant faible est maintenu plus longtemps. Il en résulte après *a* une période latente plus courte, une ascension plus rapide et plus forte, et une chute plus rapide qu'après *b*.

II et III. *Influence de la température du liquide pendant l'excitation.* Contractions à la suite de l'établissement du même courant intense, en II à 36° C, en III à 45° C. En II ascension plus lente, mais chute plus rapide qu'en III, nonobstant la durée moindre, dans ce dernier cas, du passage du courant.

IV. *Chauffage dans l'air*, en *a* par un courant électrique plus fort, en *b* par un courant plus faible. Refroidissement accéléré par un courant d'air à la température ordinaire (18°). Comme conséquence, chute plus rapide de la courbe, relâchement plus rapide de la corde.

IV. *Item.* Refroidissement encore plus rapide, par un courant d'air encore plus fort.

En restant dans les limites indiquées plus haut, on peut répéter l'expérience, avec le même succès, aussi souvent qu'on le veut, sur la même corde, et faire ainsi exécuter à celle-ci, en peu de temps, un travail mécanique très notable. Par exemple, un bout de corde *mi* gonflée dans l'eau, de 30^{mm} de longueur et d'environ 1^{mmq} de section transversale, peut, étant chauffé jusque vers 75°, élever de 5^{cm} un poids de plus de 100^{gr}, ou,

si le raccourcissement est rendu impossible, produire une tension de plus de 300gr. Des cordes de 0mm,7 de section, simplement humides, non raccourcies par un long séjour dans l'eau, développèrent, lors du chauffage à 130°, des forces de plus de 1000gr, des forces, par conséquent, qui surpassent plus de quatorze fois celle des plus puissants muscles de l'homme [1]).

La force raccourcissante obtenue par une élévation de température est — phénomène analogue à celui que présentent les muscles lors de l'excitation — d'autant plus petite que la corde se trouve déjà contractée davantage par imbibition chimique ou par chauffage. C'est ce qu'ont appris des expériences avec surcharge, faites, en appliquant un dispositif imité de celui de l'interrupteur à grenouille, sur des cordes de violon traitées par l'eau, l'acide lactique, l'acide acétique, l'acide chlorhydrique, la potasse en solution, la glycérine, les températures élevées.

Mes expériences actuelles ne permettent pas encore de dire quelle proportion de la chaleur communiquée à la corde peut, dans le cas le plus favorable, être convertie en travail mécanique. Pour répondre à cette question, il faudra tenir compte de l'importante circonstance, déjà mentionnée itérativement, que la corde est susceptible d'éprouver par la chaleur un changement persistant. Quand on chauffe pour la *première fois*, au-dessus de la température de début du raccourcissement, une corde de violon humectée d'eau, d'une solution de sel, ou de glycérine, elle devient d'une manière permanente plus courte et plus épaisse, plus extensible et moins biréfringente, et cela d'autant plus que, entre certaines limites, la température de début a été dépassée davantage (Appendice, II, V). Le travail qui peut être développé lors de ce premier chauffage est si grand qu'il ne saurait être expliqué, suivant la loi de Carnot-Clausius, par les calories absorbées du dehors. Evidemment, il y a ici un vrai processus de déclanchement,

---

1) Voir, pour plus de détails, l'Appendice, IV.

et non une conversion directe de chaleur en énergie mécanique. La chaleur agit comme stimulant sur les forces de tension assoupies dans la corde, et ce sont celles-ci qui, au moins pour la plus grande part, développent la force raccourcissante et par conséquent exécutent le travail. Il est à présumer que dans ce processus la matière de la corde elle-même dégage de la chaleur, et que sa chaleur de combustion diminue [1]). Le travail que la corde peut ensuite exécuter, quand on élève de nouveau sa température d'un nombre déterminé de degrés, — tout en restant au-dessous de la plus haute température qui avait été atteinte lors du premier raccourcissement thermique, — est au contraire dû, exclusivement ou du moins principalement, à la chaleur communiquée du dehors: par refroidissement jusqu'à la température initiale, la corde revient à l'état initial. Le processus est maintenant, — au moins d'une manière approximative, — un cycle, qui peut être reproduit aussi souvent qu'on le désire. Jusqu'à quelle valeur, dans cet état de la corde et sous les conditions les plus favorables, pourra s'élever l'effet économique, c'est ce que des expériences ultérieures devront faire connaître.

Comme les particules qui développent la force ne forment en tout cas qu'une faible fraction de la masse totale, dont le reste est ainsi simplement porté à une température plus haute, sans pouvoir contribuer au travail de raccourcissement, on doit s'attendre à ce que l'effet utile sera beaucoup moindre que dans la contraction physiologique du muscle et tout au plus du même ordre que la valeur pouvant être atteinte lorsque le muscle vivant est chauffé, du dehors, au-dessous du „seuil de l'excitation" (*Reizschwelle*).

Ainsi que le montre le microscope, les particules biréfringentes manquent entièrement dans la substance interfibrillaire,

---

[1]) Provisoirement, je ne suis pas encore suffisamment outillé pour l'étude expérimentale de ces importantes questions, relatives au développement de chaleur lors du raccourcissement.

qui, à elle seule, forme déjà une grande partie du tissu conjonctif, et les fibrilles elles mêmes contiennent sans doute, en dehors des éléments inogènes, une quantité notable de substance inactive, entre autres l'eau d'imbibition, surtout lorsque, à la suite d'actions chimiques ou thermiques, ils sont gonflés et raccourcis d'une manière durable. La corde de notre modèle ne correspond donc pas, sous ce dernier rapport, à un élément inogène du muscle, mais plutôt au muscle entier.

Il importe d'appuyer particulièrement sur cette circonstance, parce que, sans cela, on pourrait voir, dans la très faible valeur du coefficient économique de la chaleur qui peut se transformer en travail mécanique, une objection sérieuse contre la théorie qui attribue la force musculaire à une action thermodynamique. En effet, l'objection que M. Ad. Fick [1]) a élevée contre les vues que j'ai exposées dans ce mémoire au sujet de l'origine de la force moléculaire, repose sur la supposition que la masse des particules inogènes biréfringentes doit être évaluée à une quantité très notable „peut-être à au moins un tiers de la substance musculaire". Or, à mon avis, cette estimation est beaucoup trop forte. On pourrait encore concéder que les éléments biréfringents sarceux („*sarcous elements*"), dans l'état de repos des fibres, forment environ un tiers de la masse, quoique l'examen microscopique montre que cette valeur est exagérée, car on ne peut plus douter que, dans l'intérieur des disques transversaux, il se trouve partout entre les éléments sarceux une quantité notable de sarcoplasma interfibrillaire. Mais, en laissant de côté cette dernière question, il faut observer que ces éléments, comme je l'ai fait ressortir dans mes premières recherches (1872), ne sont pas *identiques* avec les éléments contractiles biréfringents: ils contiennent seulement ces derniers interposés dans une substance aqueuse, excitable et conductrice de l'excitation et par suite organisée, dans laquelle, comme le montrent les contractions

1) Pflügers *Archiv*, T. 53, p. 610.

de fibrilles isolées, doivent se trouver aussi des éléments thermogènes et électrogènes (voir plus loin).

De ce que les „sarcous elements" montrent sous le microscope des propriétés biréfringentes et un aspect homogène, ce qui d'ailleurs est encore sujet à quelque restriction, il n'est pas permis de conclure qu'elles sont en réalité intégralement composées de parties biréfringentes. Lorsque les dimensions de ces éléments et leurs distances tombent au-dessous de la limite de visibilité microscopique, les éléments sarceux doivent nécessairement se comporter comme des corps biréfringents homogènes [1]). La masse des „sarcous elements" peut donc très bien excéder plusieurs fois celle des éléments inogènes qu'elles renferment. Dans quelle proportion, celle de 10 fois, de mille fois, ou plus, c'est une question sur laquelle on peut, pour le moment, avoir des opinions diverses, mais, autant que je puisse voir, rien n'empêche de regarder cet excès comme très grand.

Je ne crois pas qu'il soit possible de calculer approximativement quelle fraction de la substance musculaire doit être composée de particules inogènes, si celles-ci produisent du travail mécanique dans un cycle thermodynamique. Nous ne savons rien au sujet de leur capacité calorique, de leur forme, (qu'on doit supposer allongée, fibreuse), de leurs dimensions, de leurs distances aux foyers d'action chimique qui leur fournissent la chaleur, ni encore au sujet des mêmes conditions dans les autres parties solides, à mouvement simplement passifs, des élements sarceux. Même s'il était possible de déterminer la quantité de chaleur développée dans chaque foyer, nous ne saurions rien encore de la marche ni de la durée de ce processus, dont dépendent à chaque moment la température absolue de chaque point et, par suite, les chutes de température. Cependant,

---

[1]) Par contre, la substance contractile pourra se montrer uniréfringente, quand elle ne contient qu'une faible proportion d'inotagmes. C'est ce qui arrive dans le protoplasme riche en eau (par exemple les plasmodies) dans lequel aussi la force contractile est très faible.

même en admettant les conditions les plus défavorables à notre théorie, on arrive toujours à ce résultat que les forces contractiles doivent agir en beaucoup plus de points qu'il ne pourrait être le cas si le mouvement devait être causé par l'action directe des forces chimiques. La sphère d'action des foyers de chaleur chimiques est, selon notre représentation, considérablement plus grande, comme celle par exemple d'un archer ou d'un frondeur comparée à celle d'un lutteur, — et ceci me paraît être le point essentiel.

Le rapport entre la masse des parties inogènes et celle des autres parties de la substance musculaire pourrait donc très bien être de même ordre que celui entre le volume de la corde de notre modèle et le volume du réservoir entier. C'est sous ce rapport que la corde pourrait donc être comparée à un élément inogène.

Lorsque, au lieu d'une corde gonflée, on choisit un corps qui ne renferme que peu d'eau, et dont la masse contient une proportion plus grande de substance biréfringente et contractile sous l'influence de la chaleur, on peut réaliser dans notre appareil des valeurs beaucoup plus élevées du coefficient économique. Tel est, par exemple, le caoutchouc, qui, comme on sait, lorsqu'il est étiré devient biréfringent uni-axe et en même temps contractile par la chaleur. Quoique, à l'état de la plus grande pureté, il ne constitue pas en réalité une matière homogène, mais un mélange de diverses substances, qui certainement ne participent pas toutes activement à la contraction thermique, il peut cependant être considéré comme homogène relativement à une corde gonflée par absorption d'eau. L'influence de l'étirement sur ses propriétés optiques et mécaniques doit donc se faire sentir dans un nombre relativement grand de ses points, peut-être dans la plupart, et par suite la partie de sa masse qui se contracte activement par la chaleur doit être considérable, comparée à celle de la corde de boyau. La force contractile que peut développer un fil de caoutchouc, lorsqu'il est chauffé à un degré déterminé

et modéré, est en effet beaucoup plus grande que celle des tendons gonflés par imbibition ou des muscles contractés au maximum, à section égale. De bons fils de gomme élastique, d'une section de $\frac{1}{8}$ de millimètre carré, lorsqu'il sont portés à environ 20° C au-dessus de la température ordinaire, peuvent encore soulever facilement des poids de plus de 800 grammes. Cette tension correspond à plus de de 640 kilogrammes par centimètre carré, c'est-à-dire à plus de 60 fois la force que le muscle péronier de l'homme peut développer dans la *plus violente* excitation tétanique. Comme le montrent les expériences qui seront communiquées dans l'Appendice VII, on peut, avec cette matière, transformer en travail mécanique une partie considérable de la chaleur absorbée du dehors. Il importe peu, pour la question qui nous occupe, d'examiner si la technique ou l'industrie pourront tirer quelque profit de ce moyen; on peut même en douter, mais il ne me semble pas que ce soit chose absolument impossible. Quoi qu'il en soit, en présence de ces faits on ne pourra plus contester, à mon avis, qu'il ne soit permis de *chercher la cause du développement de force, lors de la contraction du muscle vivant*, dans l'échauffement de particules biréfringentes. Or, c'est en cela que je suis porté à voir le principal résultat des présentes recherches.

Avec ce résultat, toutefois, n'est pas encore décidée la question de savoir s'il s'agit d'une simple transformation, en proportion équivalente, d'énergie calorifique en énergie mécanique, comme dans un cycle réversible de Carnot, ou d'un dégagement, par la chaleur, de forces de tension emmagasinées, ou des deux processus à la fois.

Si l'on n'avait pas affaire exclusivement à une simple transformation, il faudrait, me semble-t-il, se représenter les inotagmes comme des appareils renfermant, à la façon d'un fil de caoutchouc fortement étiré, une grande provision de force de tension mécanique, qui dans l'état de repos serait empêchée, par quelque obstacle ou arrêt, de se convertir en énergie actuelle, mais que la chaleur, en présence d'une quantité

suffisante d'eau, pourrait dégager. L'existence de pareilles tensions est déjà indiquée, en effet, par le pouvoir biréfringent. La contraction musculaire ne correspondrait alors plus, du moins exclusivement, à la contraction d'une corde de boyau chimiquement ou thermiquement affaiblie, mais plutôt à celle d'une corde encore vierge. Dans cette dernière, toutefois, les forces de tension dégagées par la chaleur et dépensées ne se reproduisent pas aux dépens de sources d'énergie existant dans la corde elle même, tandis que le muscle posséderait le pouvoir de régénérer immédiatement la partie consommée des forces de tension, soit en ramenant les inotagmes de l'état de raccourcissement à l'état de tension antérieur, soit en produisant de nouveaux inotagmes.

Bien entendu, l'énergie nécessaire à cet effet ne peut provenir, *en dernière instance*, que de l'énergie chimique potentielle des constituants du muscle; le phénomène devra bien être le même, en principe, que celui qui se passe à la naissance des premiers éléments contractiles biréfringents, lors de la formation et de la croissance des fibrilles, analogues peut-être à la formation et à l'accroissement des cristaux [1]).

Dans le caoutchouc, la force de tension nécessaire pour la production de nouveau travail mécanique à l'aide de la chaleur

---

[1]) On lira avec fruit, à ce sujet, les développements, fondés sur d'intéressantes expériences, qu'a présentés M. V. von Ebner (*l.c* p. 219—232). Il convient de rappeler aussi la découverte, due à Mitscherlich, de l'inégale dilatabilité thermique des cristaux biréfringents, et spécialement le fait que chez les cristaux uniaxes, on a observé, en les chauffant, un *raccourcissement* dans *une* direction, un allongement dans les directions perpendiculaires à celle-là. Les relations entre les propriétés optiques et mécaniques sont d'ailleurs, même chez ces corps relativement si simples, déjà très compliquées; c'est ainsi que, dans les cristaux où l'axe optique coïncide avec la direction de la plus grande élasticité, cet axe est loin d'être toujours la direction de la plus grande dilatabilité par la chaleur; il peut être aussi la direction de la dilatabilité la plus faible. Comp. P. Groth, *Physikalische Krystallographie*, Leipzig, 1876, p. 134; W. Ostwald, *Lehrb. d. allgemeinen Chemie*, 2e éd., Leipzig, 1891, T. I, p. 892 et suiv.

est obtenue par la dépense de travail extérieur (étirage au moyen d'un poids, par exemple). Les cordes à boyau, affaiblies par imbibition chimique ou thermique, se comportent de manière analogue, mais non de manière identique. Comme le montrent les nombres du Tableau II de l'Appendice, elles peuvent, même *sans charge*, se rallonger très notablement en se refroidissant, et elles sont alors de nouveau susceptibles de se raccourcir par l'influence de la chaleur et de fournir du travail. Sous ce rapport, elles se rapprochent beaucoup plus des muscles striés vivants, qui, déchargés au sommet de la contraction, reprennent d'ordinaire encore plus parfaitement leur longueur primitive. On sait, toutefois, que même chez les muscles ce retour aux dimensions initiales n'est pas complet, lorsqu'ils ne sont pas étendus, en outre, par la dépense de quelque travail extérieur, travail qui, dans l'état de vie, est effectivement toujours opéré par les forces élastiques des tendons, ligaments, aponévroses, cartilages distendus, par la contraction des muscles antagonistes, le poids des os, la pression du sang, etc.

En tout cas, la source principale de la force nécessaire à la restitution de la tension élastique du muscle doit se trouver en général, — les observations microscopiques nous l'apprennent directement, — dans la substance des fibrilles elles-mêmes. Chacune de ces fibrilles, en effet, s'étend activement, comme le prouve la forme très sinueuse qu'elles prennent, lors du relâchement, dans le cas où des résistances extérieures les empêchent de s'étendre en ligne droite [1]). L'*une* des impulsions à cette réextension devra provenir de forces élastiques créées, dans les éléments sarceux ou dans la substance organisée des fibrilles, par le raccourcissement même des inotagmes, auxotoniquement; à cette impulsion viendront se

[1]) Nulle part ce fait ne se laisse observer plus facilement et plus parfaitement que chez les fibrilles musculaires du *Stentor* (voir: *Contractilität und Doppelbrechung*, dans Pflüger's *Archiv*, T. XI, 1881, p. 446).

joindre les tensions, également nées de la contraction elle-même et croissant avec elle, des parties de la fibre musculaire avec lesquelles les segments fibrillaires contractiles sont mécaniquement unis, telles que: segments isotropes des fibrilles, substance interfibrillaire, sarcolemme, etc.

Si peu d'importance, pour la reconstitution du pouvoir de raccourcissement du muscle, qu'on veuille maintenant attribuer en général à tous ces facteurs purement mécaniques [1]), il n'en existe pas moins, entre notre modèle et le muscle vivant, une analogie très digne d'attention, à ce qu'il me semble: elle consiste en ce que, chez tous les deux, la grandeur de la force raccourcissante produite par une excitation déterminée ou, respectivement, par une élévation déterminée de température, dépend de la charge, et cela, pour tous les deux, dans le même sens. M. Adolphe Fick [2]) a le premier observé ce fait surprenant que le muscle d'attache de l'Anodonte élève des poids plus lourds à une plus grande hauteur que des poids plus légers, et, indépendamment de lui, M. R. Heidenhain [3]) a fait voir que la même excitation peut dégager, aussi dans le muscle strié étendu, plus d'énergie mécanique que dans le muscle non étendu.

[1]) Il s'en faut de beaucoup, d'ailleurs, que cette importance soit toujours insignifiante. Le muscle d'attacbe des Bivalves, après avoir été excité, ne paraît se relâcher convenablement que sous une charge plus forte. Dans le muscle pédonculaire des Vorticelles, l'énergie du raccourcissement est, sans nul doute, convertie principalement en tension élastique de la masse solide qui enveloppe le filament musculaire; lors du relâchement du muscle, cette tension est utilisée à l'extension de celui-ci et, par suite, à la production d'une nouvelle force de tension élastique, disponible pour de nouvelles contractions. Aussi, lors de la secousse musculaire, le travail à dépenser au dehors (déplacement du corps de l'animal, au sein de l'eau, dans la direction du point où le pédoncule est fixé) est-il, dans ce cas, toujours très faible et peu différent de celui dépensé pendant le relâchement.

[2]) Ad. Fick, *Beiträge zur vergleichenden Physiologie der irritablen Substanzen*, Braunschweig, 1863, p. 63.

[3]) R. Heidenhain, *Mechanische Leistung, Wärmeentwickelung und Stoffumsatz bei der Muskelthätigkeit*, Leipzig, 1864, p, 115.

Le même fait s'observe, comme il résulte des expériences communiquées dans l'Appendice, IV, VII, VIII, tant dans les cordes gonflées chimiquement que dans les cordes raccourcies thermiquement, dans les cordes qui ont été étendues, et dans celles qui ne l'ont pas été. Il subsiste d'ailleurs aussi pour le gonflement à température constante, ainsi que le montrent les expériences rapportées dans l'Appendice. L'accord avec le muscle s'étend même au rapport quantitatif, en tant que les différences sont, dans les deux cas, des grandeurs du même ordre.

Pour notre théorie, ces deux faits, en apparence surprenants, ont si peu d'imprévu, qu'elle aurait plutôt conduit à les prédire. Car des influences qui augmentent le pouvoir biréfringent doivent, suivant notre interprétation, faire croître généralement la force raccourcissante. Or, effectivement, d'après les expériences de M. von Ebner [1]), l'extension augmente le pouvoir biréfringent dans les tendons, les muscles lisses et, sous des conditions déterminées, sensiblement aussi dans les fibres musculaires à stries transversales. Des fibres élastiques et même des bandelettes de caoutchouc présentent le même phénomène. Il n'est donc pas sans importance de savoir que, pour ces substances également, la dépendance de la force raccourcissante à l'égard de la tension initiale se laisse démontrer expérimentalement [2]).

M. Heidenhain à fait voir, à la vérité, que dans le muscle ce n'est pas seulement l'énergie mécanique, mais aussi le développement de chaleur et la production d'acide lactique, qui croissent avec la tension initiale. Mais il n'est encore nullement prouvé, me semble-t-il, que ces deux actions ne soient pas en partie des phénomènes subséquents ou concomitants plutôt que des causes de l'augmentation d'énergie

---

[1]) *l.c.*, p. 50 (tendons), 60 (os), 71 (cartilage), 80 et suiv. muscles striés en travers, 178 et suiv. (muscles lisses), etc.

[2]) Voir l'Apendice, IV.

mécanique. La formation d'acide lactique n'a probablement rien à faire du tout avec la production de force dans le muscle lors de la contraction. D'abord, ainsi qu'il a déjà été dit, elle n'explique pas la grandeur du travail accompli. Ensuite, elle demande trop de temps, comme il résulte du fait que la formation d'acide est empêchée par l'immersion du muscle frais dans l'eau bouillante. Enfin, d'après les observations de M. Du Bois-Reymond, elle paraît manquer dans plusieurs muscles (estomac des oiseaux, gros intestin, etc.). En ce qui concerne l'accroissement de la chaleur développée, il faut se souvenir que tout gonflement par imbibition s'accompagne d'une élévation de température, et ne pas perdre de vue, en tout cas, que suivant les expériences de M. Heidenhain le travail mécanique, dans le muscle, croît beaucoup plus rapidement avec la charge que ne le fait la production de chaleur. Ce dernier résultat, au moins, pourrait être expliqué suffisamment par l'influence de la charge sur le pouvoir biréfringent.

L'influence que la tension exerce sur le travail chimique et par suite sur le développement de chaleur peut très bien être indirecte; elle pourrait, par exemple, provenir d'une modification que l'extension produit dans la disposition des parties chimiquement actives. Cette modification doit même nécessairement être très considérable et en même temps très compliquée, puisque les fibrilles, la substance interfibrillaire, le sarcolemme, ainsi que, dans les fibrilles mêmes, les éléments uni- et biréfringents sont très inégalement dilatables et élastiques. Il serait étonnant que ces propriétés ne se fissent pas sentir dans les actions chimiques. Cette dépendance mutuelle ne peut fournir, à mon avis, aucune preuve en faveur de la théorie qui, dans le mouvement des muscles, considère comme identiques les attractions chimiques et mécaniques.

Il serait injuste d'attendre de notre modèle plus qu'une analogie générale entre ses effets et ceux du muscle. La différence des dimensions absolues à considérer doit déjà, à

elle seule, pouvoir entraîner des différences extrêmement frappantes dans les phénomènes particuliers. Notamment, sous le rapport de leur succession plus ou moins rapide. Les distances entre les particules thermogènes et les particules inogènes étant dans le modèle des milliers de fois plus grandes que dans le muscle, il se passera dans le premier, même à égalité de la différence de température et des autres conditions thermiques, beaucoup plus de temps avant que la température de début du raccourcissement soit atteinte par les inotagmes, beaucoup plus de temps avant que tous les éléments qui se gonflent aient pris la température maxima, beaucoup plus de temps avant que la température, lors de son décroissement, se soit remise en équilibre avec celle de la masse ambiante. De là vient que, dans notre modèle, une très petite fréquence des excitations est déjà capable de déterminer, au lieu d'une contraction simple, un „tétanos": des intervalles de quelques secondes peuvent y suffire. Pour la même raison, il n'y a pas à songer à la production d'alternatives de tension et de relâchement tellement rapides qu'il puisse en résulter un phénomène auditif, correspondant au „bruit musculaire". A qui douterait, toutefois, que les tons produits dans les muscles striés par des excitations de grande fréquence puissent aussi être provoqués par des variations également rapides de la température et, par suite, des forces élastiques des inotagmes, — je rappellerai les oscillations, se traduisant par des tons non moins élevés, que la même cause excite dans la lourde masse de l'instrument de Trevelyan.

Il y aurait d'ailleurs abus, bien entendu, à vouloir expliquer uniquement par la différence des dimensions les différences qu'on observe, dans la durée du stade latent et dans le cours de la contraction, entre divers muscles et notre modèle. En effet, dans les muscles lisses, où il ne peut pourtant s'agir également que de distances moléculaires ou tout au plus microscopiques, les durées en question sont fréquemment aussi longues, ou même plus longues, que dans notre modèle. Citons,

par exemple, le muscle d'attache des mollusques bivalves, qui, aussi dans son aspect extérieur, ressemble tant aux tendons.

Une part notable à la détermination de la rapidité avec laquelle se produisent et s'accomplissent les phénomènes mécaniques devra toujours être prise par la rapidité et la grandeur du développement de chaleur dû aux molécules chimiquement actives, ainsi que par les propriétés spécifiques (pouvoir biréfringent, capacité calorifique, élasticité, etc.) et l'arrangement des particules inogènes, et par la nature du liquide qui les imprègne.

Dans le muscle, organe entretenu par des échanges nutritifs et n'agissant pas comme corps simplement élastique, les conditions sont qualitativement et quantitativement si différentes de celles de notre modèle, et en outre d'une complexité tellement supérieure, qu'il serait hasardeux d'étendre déjà notre tentative d'explication aux nombreuses particularités du phénomène; on ne saurait songer, notamment, à vouloir rendre compte, même partiellement, des faits concernant la thermodynamique du muscle, faits dont la connaissance est due surtout aux remarquables recherches de MM. Heidenhain et A. Fick. Il doit suffire, provisoirement, que notre conception ne soit en désaccord avec aucun fait avéré et qu'elle explique naturellement les phénomènes capitaux. Or, en embrassant par la pensée le champ des faits de la physiologie, je crois que tel est le cas.

Néanmoins, vu l'importance et la portée du principe de notre théorie, il ne sera pas inopportun d'en vérifier encore la valeur, dès à présent, dans quelques-unes de ses conséquences principales.

C'est une suite nécessaire de notre théorie, me semble-t-il, que le raccourcissement par la chaleur et l'allongement par le refroidissement doivent se laisser produire aussi dans des muscles ayant perdu leur excitabilité, pourvu qu'ils soient encore biréfringents et que leur structure ne soit pas altérée au point de rendre impossible toute action perceptible au dehors: tel pourrait être le cas, par exemple, si la situation des inotagmes

était devenue irrégulière par rapport aux éléments sarceux ou aux disques transversaux, ou si les résistances internes avaient augmenté par la solidification de matières dissoutes, etc.

L'observation, que même des muscles morts peuvent encore, quand on les chauffe, se rétracter dans la direction longitudinale, est d'ailleurs de date déjà ancienne. Mais il n'a pas été décidé péremptoirement, que je sache, si ce resserrement procède réellement de la substance contractile, ou s'il ne tient pas plutôt au raccourcissement du tissu conjonctif contenu dans le muscle ou le tapissant extérieurement, et aussi, éventuellement, au raccourcissement des vaisseaux sanguins et des nerfs. Quant à des résultats d'où l'on pourrait conclure avec certitude que des fibres musculaires mortes se rallongent lors du refroidissement, je n'en connais aucun. Les expériences de M. Schmulewitsch [1]), faites, entre 2° C et 28° C, sur des muscles striés *survivants*, ont donné du raccourcissement quand on chauffait, de l'allongement quand on refroidissait. M. Samkowy [2]) a vu la même chose, entre 0° et 32°, chez le couturier vivant de la grenouille et, entre 19° et 37°, chez le sterno-mastoïdien du lapin. D'après cela, la température de début pour le raccourcissement thermique du muscle vivant semblerait être de beaucoup inférieure à la température normale du corps. Mais la vraie cause de ce raccourcissement, ou du moins sa cause principale, pourrait bien se trouver dans les transformations chimiques devenues plus actives à la suite du chauffage, par conséquent dans la chaleur *produite*, et non dans l'élévation *directe* de la température des inotagmes. Les muscles morts ne présentaient pas ce phénomène, au dire des deux auteurs précités. Les températures dont ils ont fait usage paraissent, toutefois, n'avoir par dépassé 32° à 37°.

J'ai donc entrepris des expériences propres à trancher la question. J'opérais sur des muscles de grenouille (cœur, ad-

---

1) *Centralblatt f. d. med. Wissenschaft*, 1867, p. 81 et 1870, p. 609

2) *Arch. f. die ges. Physiol.* etc. de Pflüger, T. IX, 1874, p. 399.

ducteurs du fémur, couturier, de la surface duquel on avait enlevé le périmysium), dépourvus autant que possible de tissu conjonctif et de vaisseaux, et qui avaient été, soit desséchés puis ramollis dans l'eau, soit rendus rigides par la chaleur, soit durcis dans l'alcool. A ces expériences fut employé l'appareil décrit plus haut, dont était retirée, toutefois, la spirale de fil de platine. L'échauffement du muscle — fixé au support et relié au levier faiblement chargé — avait lieu, ou bien au sein du liquide, au moyen de la flamme d'une lampe à alcool tenue sous l'éprouvette, ou bien par une immersion subite dans le liquide chauffé préalablement; parfois aussi on l'obtenait — ce qui permet la régulation la plus parfaite — au moyen d'une spirale de mince fil de cuivre ou de platine, qui entourait l'éprouvette extérieurement et par laquelle passait un courant électrique réglable, à volonté, au moyen d'un rhéostat à vis. Renvoyant, pour le détail des expériences, aux données de l'Appendice (Tabl. VI *a*, *b*. *c*), je me bornerai ici à en faire ressortir le résultat essentiel.

Dans tous les cas où la charge n'était pas trop forte, on a pu provoquer du raccourcissement par un échauffement modéré, de l'allongement par le refroidissement. La grandeur du raccourcissement montait parfois à plus de 20% et croissait avec la grandeur de l'élévation de température. A toute température constante, la longueur restait invariable. *Par le refroidissement, la longueur primitive pouvait être restitué complètement*, même, fréquemment, lorsque le raccourcissement thermique avait atteint d'assez hautes valeurs (5—10 %). Les températures de début se trouvaient assez notablement au-dessus du degré de chaleur suffisant pour déterminer la raideur thermique: à 45°, 58°, 60° C. — La force développée lors du raccourcissement dépassait souvent de beaucoup 100^{gr} par centimètre carré de la section transversale du muscle; elle était donc, à la vérité, bien plus petite que celle des muscles vivants. Cela, du reste, n'a rien que de conforme à ce qu'on pouvait attendre, puisque la force du raccourcissement est en

général d'autant moindre que le raccourcissement a déjà fait plus de progrès; en outre, il est à prévoir que les conditions necessaires au déploiement d'actions mécaniques extérieures deviendront beaucoup plus mauvaises à la suite de la mortification et de la coagulation du contenu musculaire. — Ces expériences, elles aussi, peuvent être répétées tant qu'on veut sur le même objet, et toujours avec le même succès.

Si en ce point important notre théorie s'est confirmée, en un autre, d'importance non moindre, elle paraît au premier abord rencontrer des difficultés plus sérieuses: à savoir, pour l'explication des phénomènes de la *raideur cadavérique*, spécialement de la *raideur thermique*. A la vérité, rien n'empêcherait de considérer le raccourcissement des muscles comme dû au surcroît d'activité de la production calorifique interne, surcroît déterminé par l'apport de chaleur du dehors. Mais, la combustion physiologique terminée, et la température s'abaissant, il semblerait qu'on dût s'attendre à un rallongement, au moins modéré, si réellement la température des inotagmes détermine seule, à chaque instant, le degré du raccourcissement. Or, le muscle raidi par la chaleur reste, en apparence, raccourci de façon durable.

Cette circonstance, qui d'ailleurs mérite d'être étudiée encore de plus près quant aux limites où elle subsiste, ne constitue pourtant pas une difficulté pour la théorie, vu que la température des inotagmes est loin de déterminer, à elle seule, la mesure du raccourcissement. Celui-ci, comme nous l'avons vu plus haut, dépend, à un degré très marqué, aussi à la température ordinaire de la composition du liquide imbibé: en particulier, les éléments musculaires se gonflent et se raccourcissent plus fortement dans les acides organiques très étendus, par exemple dans l'acide lactique, et restent dans cet état de raccourcissement tant que l'acide n'a pas été neutralisé ou éloigné de l'une ou l'autre manière. Lors d'une secousse contractive ordinaire, modérée, ce „gonflement chimique" ne peut guère, d'après nos explications antérieures, contribuer

sensiblement à l'effet produit, parce que l'acide formé est en quantité beaucop trop faible, et qu'en outre il est trop vite neutralisé et peut-être aussi brûlé plus complètement. Dans un muscle où le sang circule, l'acide, même formé en abondance, pourra être rendu inactif par le mélange incessamment renouvelé du liquide alcalin. Mais lors d'une action excessive, et spécialement dans l'organe soustrait à la circulation sanguine et envahi par la raideur cadavérique, on sait que l'acide s'accumule en proportion très notable, ce qui devra sans doute déterminer, par gonflement chimique, un raccourcissement persistant. — Que d'ailleurs, après la disparition de la raideur, le rallongement du musle doit être devenu beaucoup plus difficile, parce que la coagulation de la myosine et l'excrétion d'albuminate alcalin ont augmenté les résistances internes dues au frottement, — il est à peine nécessaire de le mentionner. C'est un résultat d'expérience, en effet, que le muscle raidi est plus difficilement extensible.

Dans la circonstance que, lors de la contraction physiologique, la prépondérance revient au „gonflement thermique," lors du raidissement durable, au „gonflement chimique", se trouve, à mon avis, l'une des différences essentielles entre les deux processus. Entre les différentes espèces de rigidité (rigidité par submersion dans l'eau, rigidité par l'action du temps, etc.) il existe sans doute aussi des différences sous ce rapport. Même la rapidité du raidissement devra déjà amener des différences: par exemple, lors du raidissement par élévation rapide de la température, la production calorifique interne contribuera plus au raccourcissement que lors d'un échauffement très progressif ou d'un lent raidissement spontané. Dans le „raidissement par l'eau", le gonflement chimique joue certainement un rôle principal; dans le „raidissement électrique", provoqué par des excitations électriques excessives, interviennent sans doute, avec énergie, les deux processus.

Notre théorie ouvre aussi de nouveaux aspects quant à la notion du *tonus musculaire:* elle indique deux sources diffé-

rentes de ce phénomène, l'une chimique, l'autre thermique, et conduit ainsi à distinguer un „*chimotonus*" et un „*thermotonus*". Toutes ces relations méritent, du point de vue de notre théorie, une étude spéciale et approfondie.

Nos expériences d'échauffement, tant sur le modèle que sur les muscles, impliquent, comme on l'aura remarqué, une réfutation très nette de la théorie de la contraction que M. G. Elias Müller [1]) a récemment édifiée, avec beaucoup de science et une sagacité peu ordinaire, sur des hypothèses, il est vrai, en partie très arbitraires et très contestables. Selon le savant de Göttingen, le raccourcissement du musle est dû à l'attraction et à la répulsion électriques de cristalloïdes biréfringents, dont les pôles sont chargés électriquement par la chaleur: la force musculaire serait donc d'origine pyro-électrique. Cette théorie demande, comme l'auteur lui-même le fait ressortir, que le muscle raccourci par l'élévation de température se rallonge dès que la température des cristalloïdes devient constante, puisque les charges électriques doivent alors disparaître. Nos expériences montrent, toutefois, qu'en ce cas le muscle reste raccourci indéfiniment. Sa longueur est, à chaque instant, non pas une fonction de la rapidité avec laquelle la température croît, mais une fonction de la température absolue qui règne à ce moment dans les couches biréfringentes. Il en est de même pour toutes les substances anisotropes [2]). Ainsi tombe la théorie de M. Müller.

Notre propre théorie ne rend pas compte du tout des phénomènes électriques qui se passent dans le muscle. Ce serait là une objection sérieuse, si les phénomènes électriques avaient

---

[1]) G. E. Müller, *Die Theorie der Muskelcontraction. Vorläufige Mittheilung, Vorgelegt von* F. Klein, *Nachr. von der K. Gesellsch. d. Wissensch.* etc. Göttingen, 20 mars 1889. — Le même, *Theorie der Muskelcontraction*, Erster Theil, Leipzig, 1891.

[2]) Voir, par exemple, dans l'Appendice, II et fig. 3, les résultats de quelques-unes de mes expériences sur les cordes de boyau.

réellement quelque lien direct avec les phénomènes mécaniques. Mais rien n'autorise, me semble-t-il, une pareille hypothèse [1]). Bien au contraire. Alors que M. v. Helmholtz [2]), opérant sur les muscles ordinaires par les méthodes chronométriques les plus délicates, et M.M. Kölliker et Henri Muller [3]), rendant pour le cœur la chose directement visible par l'expérience de la contraction secondaire, avaient depuis longtemps démontré que le processus électrique précède, au moins pour la partie essentielle, le processus mécanique; alors que le rhéotome différentiel de M. Bernstein a permis de constater que l'onde d'excitation qui se manifeste par le changement électrique est sensiblement en avance sur l'onde de contraction, — il est incompréhensible que, devant un auditoire de physiologistes [4]), on ait pu affirmer que les phénomènes électrique et mécanique du muscle ont lieu simultanément — si même le second n'est pas l'effet du premier — sans que cette

---

[1]) Je fais ici abstraction des courants, encore trop peu étudiés, qui, d'après mes recherches antérieures (*Imbibitie als oorzaak van electriciteits-ontwikkeling*, dans *Onderzoek. physiol. labor. Utrecht*, 3e Sér. III, 1874, p. 82), accompagnent en général le raccourcissement, sous l'influence d'imbibition chimique, des éléments histologiques biréfringents uniaxes; je néglige aussi les courants qui, d'après des expériences dont la continuation m'occupe encore, apparaissent pareillement lors du raccourcissement *thermique* des mêmes éléments. Il est très possible que ces courants ne fassent pas défaut non plus dans la contraction des muscles vivants. Mais, qu'ils soient la vraie cause des courants d'action qui se produisent lors de l'excitation physiologique, c'est ce qui me semble provisoirement, pour les raisons énoncées dans le texte, extrêmement douteux.

[2]) H. v. Helmholtz, *Ueber die Geschwindigkeit einiger Vorgänge in Muskeln und Nerven*, dans *Monatsber. d. Akad. d. Wisschensch. zu Berlin*, 15 juin 1855.

[3]) A. Kölliker u. H. Müller, *Nachweis der negativen Schwankung des Muskelstroms am natürlich sich contrahirenden Muskel*, dans *Verhdl. d. phys. med. Ges. in Würzburg*, VI, 1856, p. 528.

[4]) Au congrès international des physiologistes tenu à Liège, en 1892. J'emprunte ce détail à la relation donnée par M. le Dr H. Zwaardemaker, dans le *Ned. Tijddschr. voor Geneeskunde*, 1892, T. II, n° 12.

assertion ait appelé immédiatement la contradiction la plus énergique. On peut voir un phénomène quelque temps après sa production (rigoureussement parlant cela est d'ailleurs toujours le cas), mais jamais avant. Si l'électromètre capillaire — car l'assertion se fondait sur des expériences exécutées au moyen de cet instrument — montre le commencement de de l'oscillation électrique dans le muscle plus tard que ne le fait le rhéoscope physiologique, c'est qu'il le montre *trop* tard et accuse, par là même, son insuffisance pour les déterminations chronométriques de ce genre.

Dans les fibres nerveuses, où aucune trace d'actions mécaniques visibles, ni même de développement de chaleur ou d'activité chimique, ne peut être sûrement décelée, il se passe, lors de l'excitation, de la mortification, etc., les mêmes processus électriques que dans le muscle. La grandeur des forces électromotrices y est à peine moindre que dans le muscle le plus puissant, et elle est en tout cas beaucoup plus notable que dans la plupart des muscles lisses. Les phénomènes de propagation de l'excitation, qui à coup sûr n'ont rien à faire directement avec les phénomènes de contractilité, mais bien, comme le montre l'avance prise par l'onde de négativité, avec les phénomènes électriques, ont lieu dans le muscle de la même manière que dans les nerfs. Les différences ne sont que de nature quantitative et pas plus fortes que celles qui existent entre des fibres musculaires d'espèce différente.

Aux mêmes vues conduisent aussi les importantes recherches de M. W. Biedermann, qui a trouvé „que des muscles de grenouille, même dans un stade très avancé de raideur par submersion (après une heure, ou plus, de séjour dans l'eau), peuvent développer des forces électromotrices dans le même sens et presque au même degré que des muscles non altérés" [1]),

---

[1]) W. Biedermann, *Ueber die Abhängigkeit des Muskelstroms von localen chemischen Veränderungen der Muskelsubstanz*, dans *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien*, T. LXXXI, Sect. III, p. 113, février 1880.

que l'excitabilité électrique et le pouvoir conducteur ne sont pas sensiblement affaiblis dans les parties musculaires qui, par imbibition d'eau, ont été complètement privées du pouvoir contractif. Le même savant a découvert le fait „que le muscle strié en travers est mis par l'action des vapeurs d'éther dans un état où une irritation extérieure n'y provoque aucun changement directement observable, ni localement ni à distance du point irrité, tandis qu'en ce dernier point il se produit au contraire, comme expression de l'excitation, des changements appréciables galvaniquement, et cela avec la même intensité qu'avant la narcose" [1]). Aussi M. Biedermann conclut-il déjà: „que, pour l'excitation du muscle, l'aptitude à changer activement de forme au point de l'irritation directe ne constitue pas une condition préalable nécessaire" [2]).

Le développement des organes électriques et pseudo-électriques fournit également de bons arguments en faveur de l'indépendance des phénomènes électriques à l'égard des phénomènes de contractilité. On sait que dans la plupart des cas ces organes se développent aux dépens de fibres musculaires striées transversalement. Or, au cours de ce développement, la contractilité se perd peu à peu complètement, tandis que la faculté de produire des actions électriques atteint un haut degré de perfection. Le passage progressif de la structure musculaire à la structure si totalement différente de l'organe achevé se laisse bien étudier surtout chez certaines raies [3]). Les couches transversales des fibres musculaires se transforment en épaises lamelles, réfractant fortement la lumière, et qui, superposées en grand nombre, se trouvent

---

[1]) W. Biedermann, *Ueber die Einwirkung des Aethers auf einige electromotorische Erscheinungen an Muskeln und Nerven. Ibidem*,, T. XCVII, Sect. III, p. 102, mars 1888.

[2]) *Ibid.*, p. 101.

[3]) Voir, entre autres, A. C. J. Ewart, *On the development of the electric organ of Raja batis*, dans *Transact. of the Roy. Soc.*, 1888, Vol. 167.

immédiatement au-dessous de l'expansion terminale des nerfs. L'observation en lumière polarisée [1]) nous a fait voir que, à mesure de la formation de ces lamelles, le pouvoir biréfringent diminue, pour finir par disparaître à peu près complètement. Même à des stades encore très peu avancés, où la capsule électrique se présente seulement comme un gros renflement terminal d'une fibre musculaire régulièrement striée en travers, j'ai trouvé, dans les disques transversaux de la fibre, la double réfraction déjà considérablement plus faible que dans des fibres musculaires de la queue, voisines de la première et de même épaisseur qu'elle.

Tout cela est parfaitement conforme aux exigences de notre théorie. On pourra donc donner une explication fondamentalement correcte de la force musculaire, sans tenir compte des phénomènes électriques. Il est vrai que ceux-ci, dans une théorie complète des processus vitaux du muscle, devront jouer un rôle tout aussi important que les phénomènes de contraction. Mais qui aurait le courage d'essayer, dès à présent, d'édifier une pareille théorie?

---

[1]) M. L. J. J. Muskens, qui a entrepris ces recherches dans mon laboratoire, en donnera plus tard les détails. Il tâchera encore, entre autres, de décider si les lamelles fortement réfringentes sont le développement ultérieur des disques intermédiaires (respectivement des disques accessoires) ou des disques transversaux. La substance isotrope devant être considérée, pour des raisons développées antérieurement et sur lesquelles nous reviendrons plus loin, comme le siège d'actions électriques, il semble permis de présumer que les lamelles très réfringentes des organes pseudo-électriques procèdent des couches isotropes. J'avais spécialement en vue le disque intermédiaire, qu'aujourd'hui encore, après avoir pris connaissance des préparations de M. Föttinger, j'affirme se trouver en relation intime avec les fibrilles des nerfs moteurs. Mais il est concevable aussi que les lamelles proviennent des disques transversaux, où les inotagmes disparaîtraient, tandis que les molécules actives électriquement, *électrogènes*, atteindraient un développement supérieur. La décharge électrique se substitue à la contraction.

Je veux seulement, en suite de considérations antérieures [1]), accentuer la présomption que les particules qui développent dans le muscle les forces électriques ne sont pas les mêmes que celles dont la combustion en CO_2 etc. fournit la chaleur et aussi, par l'action de celle-ci sur les éléments biréfringents, le travail mécanique; que dans le muscle on aura donc partout à distinguer des particules *électrogènes*, *thermogènes* et *inogènes*. Comme dans les nerfs, malgré de très fortes actions électriques, il n'y a ni phénomènes chimiques ni production de chaleur appréciables, la puissante activité chimique et thermique du muscle sera dépensée, au moins en majeure partie, à la fonction spécifique, la contraction, suivant le principe de transformation exposé plus haut. Le siège des molécules thermogènes devra donc être supposé aussi rapproché que possible des parties où se trouvent les particules inogènes: dans les couches biréfringentes (substance intrafibrillaire et sarcoplasme interfibrillaire), peut-être, en outre, dans les couches „plasmatiques" isotropes qui séparent les disques transversaux des disques accessoires.

Aux particules électrogènes ne peut guère incomber d'autre fonction que celle de l'excitation et de son transport [2]), et leur siège devra être cherché dans les couches isotropes, peut-être aussi dans les couches anisotropes. Quant aux isotropes, cela peut déjà être inféré, en premier lieu, du fait qu'elles ne sont pas contractiles, se rapprochent le plus, dans leurs propriétés optiques et chimiques, des fibrilles nerveuses et du contenu de l'axolemme, et se trouvent aussi, d'après la découverte de M. Föttinger, en contact plus intime avec les extrémités des filets nerveux que ne le sont les couches biréfringentes. En second lieu, la probabilité de la susdite localisation résulte sur-

---

[1]) Pflüger's *Archiv*, T. XI, 1874, p. 461 et suiv.

[2]) Sur les relations entre les processus électriques des nerfs et des muscles et le processus de conduction de l'excitation, voir surtout les développements donnés par M. L. Hermann, *Handbuch der Physiologie*, T. I, p. 255 et suiv.

tout de ce que, à cause de la hauteur absolue que les couches isotropes atteignent dans maintes sections musculaires (plus de $0^{mm},008$ chez beaucoup d'insectes), il ne semble guère possible d'admettre que l'excitation se transmette directement d'un disque transversal à celui du segment musculaire suivant. A la vérité, les nouvelles observations faites dans le champ de l'anatomie microscopique du système nerveux (par Golgi et ses successeurs), ainsi que les faits physiologiques relatifs à la conduction de l'excitation, amènent de plus en plus à l'opinion que j'ai d'abord émise pour l'uretère et ensuite étendue au cœur, à l'intestin, aux épithéliums à cils vibratiles et aux fibres nerveuses, opinion suivant laquelle la propagation d'un processus d'excitation physiologique n'aurait pas pour condition nécessaire la continuité organique moléculaire de la substance, ni même le simple contact au sens physique du mot. Mais il semble pourtant que les distances auxquelles la transmission de l'excitation cesse d'avoir lieu ne puisse pas dépasser de beaucoup la limite de la visibilité microscopique. En tout cas, puisqu'il est à présumer que dans l'activité des particules électrogènes se trouve l'impulsion première à la combustion subite des particules thermogènes, par conséquent l'excitation primaire pour chaque section musculaire, la distance entre ces deux espèces de particules ne pourra pas être grande.

Quant à la question de savoir si dans la couche biréfringente la propagation de l'excitation se fait également par l'intermédiaire de particules électrogènes, la réponse peut paraître douteuse. Au moins, la possibilité se laisse concevoir qu'ici la brusque élévation de température, causée par la combustion des molécules thermogènes, agisse comme excitation de molécule à molécule. Le petit nombre des molécules qui, lors d'une excitation modérée, exercent dans le muscle une action chimique, ne saurait être une objection très grave ; si l'on suppose, en effet, les particules thermogènes disposées par séries et de façon que leurs distances soient beaucoup plus petites dans le sens de la longueur que dans le sens

transversal, l'élévation de température provoquée, par la combustion d'une molécule, dans la molécule la plus proche, pourrait bien dépasser le seuil d'excitation. Néanmoins, l'hypothèse que des molécules électrogènes existent aussi, comme intermédiaires de la transmission de l'excitation, dans les couches biréfringentes (à l'intérieur des fibrilles ou entre les fibrilles), se recommande provisoirement par sa simplicité plus grande. Il suffit d'avoir indiqué ces questions, de la solution desquelles nous sommes sans doute encore très loin.

Avant de finir, nous devons toutefois jeter encore un coup d'œil sur les phénomènes de contractilité des mouvements protoplasmique et vibratile, analogues aux phénomènes du mouvement musculaire. Comme ils sont reliés, aussi bien à ces derniers qu'entre eux, par des transitions graduelles, le même principe d'explication doit pouvoir s'appliquer à tous. Or, je crois que notre théorie satisfait à cette condition, autant qu'on peut équitablement l'exiger. En ce qui concerne les phénomènes purement mécaniques, je puis renvoyer à mes travaux antérieurs [1]), où j'ai exposé les raisons qui conduisent à présumer que partout des changements de forme de molécules biréfringentes, provoqués par le changement de l'état d'imbibition, sont la cause des changements de forme visibles, et où j'ai, en particulier, essayé d'expliquer à ce point de vue les types observés des mouvements vibratile et protoplasmique. M. V. von Ebner et d'autres ont, en substance, accordé leur adhésion à cet essai, encore que pour certains détails, par exemple au sujet de la préexistence d'inotagmes fibroïdes biréfringents dans le protoplasme contractile non figuré, ils ne partagent pas mon opinion.

Aucune objection qui réfute le principe, ou qui seulement l'atteigne sérieusement, n'a été soulevée. Il ne s'agit donc que de savoir si la force du mouvement protoplasmique et vi-

---

[1]) Article *Protoplasma und Flimmerbewegung*, dans L. Hermann, *Handbuch der Physiologie*, T. I, 1879.

bratile peut, comme celle du muscle, provenir de la chaleur. Or, je ne vois rien qui nous empêche de l'admettre. Puisque dans toutes les cellules vivantes il s'opère une combustion physiologique avec formation de CO_2, et cela, au même instant, dans un nombre de molécules toujours relativement très faible, on ne saurait douter que chez toutes il ne doive se trouver, comme dans le muscle, des points de très haute température au milieu de grandes masses à température comparativement très basse, et que par conséquent ne soit réalisée, conformément à la seconde loi fondamentale de la thermodynamique, la condition générale pour la transformation de la chaleur en travail.

Il n'est nullement nécessaire que la chaleur engendrée par les molécules thermogènəs soit partout employée à la production de mouvements visibles, bien que cela ait probablement lieu très fréquemment (phénomènes de croissance, phénomènes de partition, sécrétions des glandes, mouvements de graisses ou d'autres particules solides à travers les cellules épithéliales, etc.). Là où, à proximité des molécules en combustion, il se trouve, régulièrement ordonnées, une grande quantité de particules biréfringentes susceptibles d'imbibition, qui sous l'influence de la chaleur tendent fortement à se ıaccourcir, — là existera la possibilité de phénomènes de mouvement plus vifs de la substance cellulaire, de „phénomènes de contraction."

Chez les organes vibratiles, ces particules inogènes se trouvent toujours dans toute la longueur des cils. Quant aux molécules thermogènes, on n'aura à en chercher le siège dans toute la longueur du filament que si celui-ci (cils, style, etc. de beaucoup de Ciliés, queues de spermatozoïdes, cils de cellules épithéliales d'animaux supérieurs) peut se mouvoir activement sur toute son étendue. Mais il y aussi beaucoup de cas (mouvement unciforme de Valentin) où la base seule change activement de forme, où l'on n'a donc à admettre qu'à cette base la présence des molécules thermogènes, chi-

miquement actives. Cela même n'est pas nécessaire, car l'action thermique pourrait éventuellement émaner aussi de la couche superficielle du protoplasma, qui est presque toujours différenciée d'une façon caractéristique (pièces basales, filaments radicaux des cils). En ce cas, les cils se rapprocheraient davantage, aussi sous le rapport chimique et physiologique, des formations ordinairement dites cuticulaires, avec lesquelles ils ont déjà la plus grande analogie au point de vue morphologique et génétique. La rapidité généralement plus grande du mouvement en avant (dans le sens du courant produit) trouve son explication dans l'instantanéité de l'élévation de température lors de la combustion explosive des molécules thermogènes, tandis que la vitesse moindre du mouvement rétrograde s'explique par la lenteur relative du refroidissement des inotagmes de la substance des cils. En général, les différences qu'on observe, quant à la forme et la durée des mouvements, entre des cils différents, ou chez le même cil sous des conditions différentes, se laissent aisément déduire de simples différences locales chronologiques dans la production et l'égalisation de la chaleur.

Si l'on voulait voir une difficulté pour notre théorie dans la grande fréquence de vibration de beaucoup de cils, — fréquence que pour les cils épithéliaux j'ai jadis [1]) estimé pouvoir atteindre au moins le nombre de 12 par seconde, — je rappellerai, comme je l'ai déjà fait pour le muscle, la rapidité encore bien plus grande des vibrations de l'instrument de Trevelyan. On doit d'ailleurs tenir compte des conditions éminemment favorables où s'opère le refroidissement des cils, par suite de leur forme effilée et aussi, le plus souvent, de leur situation à la surface d'une membrane couverte d'un liquide en mouvement.

Ce qui vient d'être dit des cils vibratiles s'applique également, *mutatis mutandis*, au protoplasma contractile non figuré.

---

[1]) *Ueber die Flimmerbewegung*, Leipzig, 1868, p. 22.

Ici, toutefois, la décomposition du processus en phénomènes chimique, thermique et mécanique, et la démonstration du passage de l'une des formes d'énergie à l'autre ne sont plus possibles, à raison de l'absence de différenciation morphologique et fonctionnelle. Les formes inférieures de la substance contractile, bien qu'en apparence les plus simples, sont, précisément à cause de cela, théoriquement les plus impénétrables, les plus complexes et, par suite, les moins propres à dévoiler les principes fondamentaux de la transformation de l'énergie. Pas plus qu'on ne saurait, dans la structure de la cellule ovulaire, saisir les traits principaux de l'organisme adulte, bien que celui-ci soit virtuellement contenu dans celle-là, — pas plus il n'est possible de reconnaître, dans les phénomènes vitaux du protoplasma non différencié, les principes des activités fondamentales ultérieures, telles que la sensibilité, la contractilité, la conductibilité nerveuse, etc. Veut-on déterminer la nature d'un de ces phénomènes, la voie la plus sûre sera de partir des états de développement les plus élevés, des cas, par conséquent, où l'on doit s'attendre à ce que le principe fondamental se révèle de la manière la plus parfaite et la plus pure, vu qu'il y est dégagé, autant que possible, de tout accessoire. Je n'aurais pas fait ces remarques, si un excellent observateur [1]) n'avait récemment préconisé, comme seule bonne et comme s'imposant en quelque sorte d'elle-même, la voie directement opposée. Je crois que l'histoire de la physiologie s'est déjà prononcée à cet égard et que l'histoire de notre problème confirmera son arrêt.

---

[1]) Max Verworn, *Die Bewegung der leb. Substanz*, p. 3 et 17.

APPENDICE.

Expériences sur les changements que la forme et les forces élastiques d'éléments histologiques biréfringents éprouvent sous l'action d'influences chimiques et thermiques.

I.

Influence de l'imbibition et de la désimbibition chimiques sur la longueur et l'épaisseur de cordes de boyau.

Toutes les expériences ont été faites, sauf mention contraire, sur des cordes à boyau (*mi* du violon) de $0^{mm},6$—$0^{mm},65$ d'épaisseur. Ces cordes furent coupées en bouts longs de 100^{mm}, et ceux-ci furent immergés, sans charge et à la température ordinaire, dans environ 100^{cc} du liquide à essayer; après la durée d'immersion indiquée dans les tableaux, les bouts étaient retirés du liquide, étendus en ligne droite, mais sans étirage, puis mesurés au moyen d'un compas à coulisse, dont le vernier permettait la lecture des centièmes de millimètre. Comme il s'agissait en général de changements très grossiers, une détermination de la longueur à $\frac{1}{2}$ mm près était ordinairement suffisante. Quant à l'épaisseur, après un gonflement très considérable (au-delà de 2 à $2\frac{1}{2}$ mm d'épaisseur) elle ne se laisse plus du tout déterminer avec exactitude, parce que la forme des bouts a cessé d'être cylindrique. Mais alors aussi les différences sont généralement d'espèce si grossière que même des déterminations approximatives restent encore utilisables.

Tableau Ia.

Influence de divers liquides sur la longueur et l'épaisseur de cordes à boyau non chargées.

Toutes les mesures sont exprimées en millimètres.

Liquide imbibé		Durée de l'action	Nombre des objets examinés	Longueur après l'imbibition			Epaisseur
				Moy.	Max.	Minim	
Eau distillée		4 heur.	1	94.5	—	—	1.2
»		18 »	1	89.5	—	—	1.2
»		1 jour	15	92.6	93.8	89.5	1.25
»		2 »	1	89.5	—	—	1.35
»		3 »	6	92	92.7	90.5	1.2
»		6 »	2	92	—	—	1.2
Sel marin	10 %	1 »	6	96	96.6	95.5	1.0
»	3.3 %	1 »	2	92	—	—	1.2
»	0.6 %	1 »	2	90.2	90.4	90.0	1.3
Sucre de canne	24 %	1 »	1	91.5	—	—	1.3
»	6 %	1 »	2	92 5	—	—	1.3
Glycérine conc.		1 »	2	100.0	—	—	0.6
1 Glycérine + 1 Aq.		1 »	9	89.7	90.0	89.5	1.4
Acide lactique	5 %	1 »	2	63.1	63.8	62.4	4.1
»	»	3 »	1	62.0	—	—	4–4.5
»	2.5 %	1 »	2	63,8	64.0	63.8	4.5
»	»	3 »	1	58.2	—	—	4–5
»	0.5 %	1 »	2	64.2	64.4	64.0	4.5
»	»	3 »	1	61.2	—	—	5.0
»	0.25 %	1 »	3	68.0	68.6	67.6	4–5
»	»	3 »	2	63.5	65.–	62.–	4.0
»	»	1½ heur.	3	76.0	76.2	75.8	3.0
»	0.1 %	2½ »	1	71.2	—	—	3.0
Acide acétique	5 %	2 jours	2	69.4	70.0	68.8	3.5
»	2.5 %	1 »	2	72.3	72.8	72.0	3.0
»	»	3 »	1	68.8	—	—	4.0
Acide chlorhydrique	5 %	10 »	1	88.2	—	—	1.6
»	»	1 »	2	90,0	—	—	1.4

Liquide imbibé	Durée de l'action	Nombre des objets examinés	Longueur après l'imbibition Moy.	Max.	Minim	Epaisseur.
Acide chlorhydrique 1%	10 jours	1	72.5	—	—	2.5-3.0
» »	1 »	2	71.-	72.0	70.0	2.6
Hydr. de potasse en sol. conc.	1 »	3	68.8	69.0	68.0	3.5
1 » 19 + Aq.	7 »	2	62 5	—	—	4.0
» »	1 »	1	80.0	—	—	2.8

Tableau Ib.

Allongement et amincissement que des cordes à boyau, préalablement raccourcies et épaissies dans des solutions d'acides et d'alcalis, éprouvent par le lavage dans l'eau pure, à la température ordinaire, sans étirage.

Liquide qui avait déterminé le raccourcissement.	Durée de l'imbibition.	Durée du lavage.	Longueur avant le lavage	Longueur après le lavage	Epaisseur avant le lavage	Epaisseur après le lavage
Acide lactique 5 %	3 jours	1 jour	62.0	83.6	4.5	3–3.5
» 2.5 %	»	»	58.2	87.3	4.5	3
» 0.5 %	»	»	61.2	88.5	5	2.5
» 0.25 %	2 »	»	65.0	87.2	4	2.2
» 0.25 %	»	2 h.	62.0	71.2	4	1.8
» 0.25 %	1½ h.	5 »	76.2	93.5	2.8	1.6
» 0.10 %	»	»	82.5	95.0	1.7	1.3
Acide acétique 2.5 %	3 jours	1 jour	68.8	90.4	env. 4	2.4
Acide chlorhydrique 5 %	10 »	»	88.2	90.6	1.6	1.35
» 1 %	»	»	72.5	91.0	3.0	1.4
1 Hydrate de potasse + 19 Aq.	7 »	»	62.5	67.5	4	4

Il ressort de ce tableau que, même après un raccourcissement de plus de 30 % et ayant duré plusieurs jours, les cordes peuvent, par simple lotion, être ramenées vers leur état primitif. Les longueurs à atteindre au moyen du lavage sont en partie les mêmes que celles prises par les cordes quand on les immerge dans l'eau, sans imbibition préalable dans un acide.

Tableau Ic.

Influence de la neutralisation sur la longueur et l'épaisseur de cordes à boyau gonflées dans un acide ou un alcali. Pour neutraliser le liquide, on y ajoutait goutte à goutte, à la température ordinaire, en agitant continuellement, des solutions très diluées de carbonate d'ammoniaque ou, respectivement, d'acide acétique.

Liquide à neutraliser.	Durée de l'imbibition.	Temps écoulé entre la neutralisation et la mensuration.	Longueur		Epaisseur	
			avant	après	avant	après
			la neutralisation.			
Acide lactique 5%	1 jour	1 jour	63.5	97.1	3.8	1.3
„ 2½%	„	4 h.	67.0	88,0	3.5	1.5
„ 0.5%	„	—	69.0	87.6	3.2	1.7
„ 0.25%	2 h.	2 h.	72.0	94.5	3.0	1.3
„ 0.1%	1 jour	4 „	81.4	94.6	2.1	1.3
Acide chlorhydrique 1%	„	„	78.0	90.5	2.3	1.4
Hydr. de pot. 1 : 19 aq.	„	„	70.5	89.2	3.5	1.5

II.

Influence de l'échauffement et du refroidissement graduels sur la longueur de tendons.

D'un grand nombre d'expériences, exécutées de façon semblable et avec des résultats analogues, je n'en décrirai et figurerai (fig. 3) qu'une seule, pouvant servir de type. L'objet expérimenté était un bout cylindrique, long de 13^{mm} et épais de 1^{mm},5, d'un tendon extenseur du pied d'un chien, bout qui était resté plongé pendant 8 jours dans de l'alcool à 60 %, puis pendant plusieurs heures dans l'eau distillée. Le chauffage avait lieu par voie galvanique, dans une très large éprouvette à parois minces, remplie d'eau et entourée extérieurement d'une spirale de fin fil de cuivre, dans laquelle passait le courant de 3 éléments de Grove ; le refroidissement s'obtenait par l'interruption ou l'affaiblissement du courant. La charge était constante, de 50 gr. Le tendon tirait sur le bras court du levier. Ses changements de longueur étaient amplifiés 30 fois par la pointe du bras long.

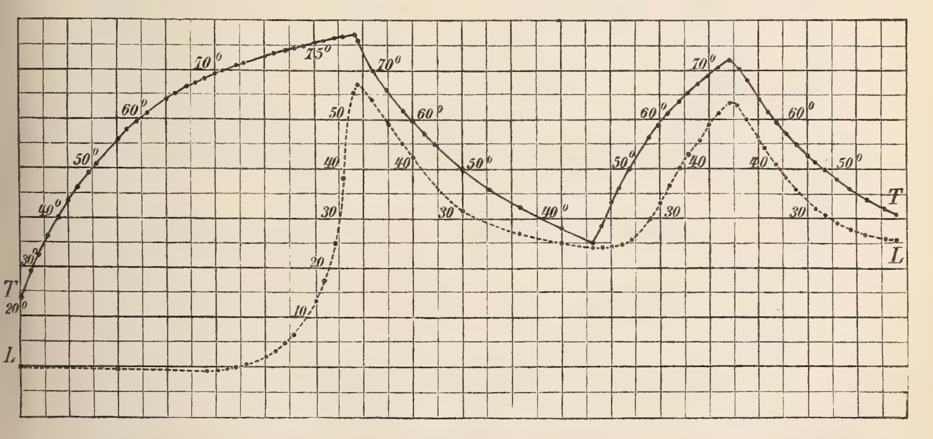


Fig. 3.

Dans la fig. 3, la courbe supérieure montre la marche de la température : unité des ordonnées = 5° C ; la courbe infé-

rieure représente la marche des changements de longueur du tendon: unité des ordonnées = 5^{mm} d'élevation ou d'abaissement de la pointe du levier, valeur correspondant à $0^{mm},166$ de changement de longueur absolue, ou, en centièmes de la longueur initiale de 13 ^{mm}, à environ 1,3 %.

L'unité des abcisses correspond à une durée de $2\frac{1}{2}$ minutes.

Voici ce qu'on remarque. Pendant que la température monte de 20° à 69°, il se produit un allongement à peine sensible. A 69° commence le raccourcissement. Dans les $7\frac{1}{2}$ minutes suivantes, la température s'élevant jusqu'à 75°, le tendon ne se raccourcit que d'environ 2,5 %, tandis qu'une élévation ultérieure de seulement 2° (!) détermine, dans le cours de 5 minutes, un raccourcissement d'environ 11,7 %. Aussitôt que la température s'abaisse, il se produit un relâchement, qui d'abord marche du même pas que la diminution de température. Mais aux mêmes degrés de chaleur correspondent maintenant des longueurs plus petites qu'avant le raccourcissement. Lorsque la température est descendue à 35°, il subsiste encore un résidu de raccourcissment d'environ 6,5 %, qui, à en juger par l'allure de la courbe de la longueur, n'aurait plus guère diminué si la température était tombée encore plus bas. A partir de ce point, la température remonte, mais la longueur du tendon reste d'abord constante. A 43°, toutefois, commence un nouveau raccourcissement, qui progresse parallèlement à l'élévation de la température et, à 72°, atteint déjà 14 % de la longueur primitive.

Par le premier échauffement la température de début du raccourcissement a donc été abaissée de 69° à 43°, et l'intervalle de température dans lequel la longueur varie proportionnellement à la température a été très notablement étendu. Ce nouvel état est persistant. Lors du second refroidissement, la longueur du tendon diminue de telle sorte qu'à des températures égales se retrouvent sensiblement les mêmes longueurs absolues que lors du second échauffement.

En ce qui concerne la valeur du raccourcissement résiduel

après chauffage à différentes températures, on trouvera des données spéciales dans le tableau suivant.

Tableau II.

Influence de 5 minutes de chauffage au-dessus de la température de début sur les dimensions de cordes à boyau imbibées de divers liquides. Longueur initiale de tous les objets, séchés à l'air, 100^{mm}, épaisseur 0^{mm},65, Tous les bouts provenaient de la même corde *mi* (dite de fabrication romaine). L'imbibition et l'échauffement avaient lieu sans charge, ce dernier au bain-marie, dans le même liquide ou la corde avait, antérieurement, été ramollie ; pour le refroidissement, on retirait la corde du liquide et on l'exposait à l'air, sur une plaque de liège.

No.	Liquide imbibé.	Température à laquelle il fut chauffé.	Longueur immédiatement après que le refroidissement a commencé	Longueur 5 min.	Longueur 30 min.	Épaisseur 30 min.
1	Eau distillée	100°	30	33.6	—	3.5
2	» »	75°	33.4	39.2	42.4	2.9
3	» »	65°	—	43.2	46.8	2.8
4	» »	60°	—	46.0	49.3	2.3
5	» »	55°	46	51.2	53.3	2.4
6	» »	50°	68	74.0	78.0	1.6
7	» »	47.5	89.5	90.3	92.5	1.3
8	NaCl 10 %	100	—	28.4	—	3.—
9	» »	»	—	28.6	—	3.—
10	1 Glycér. + 1 Aq.	100	—	39.8	—	2.4
11	» »	75	—	43.0	—	2.2

III.

Influence de différentes circonstances sur la température de début du raccourcissement thermique.

Toutes les expériences portèrent sur des segments, longs de 30^{mm}, de cordes *mi* de violon. Le chauffage avait lieu très

lentement, au bien-marie. Le réservoir de thermomètre se trouvait au voisinage immédiat de la corde, dont les mouvements étaient amplifiés 50 fois par le levier. Des changements de longueur de $0^{mm},01 = \frac{1}{3000}$ de la longueur initiale se laissaient encore sûrement observer.

Tableau IIIa.

Différences de la température de début suivant la *nature du liquide imbibé.* — Charge 5 gr. — Avant d'être chauffées, les cordes avaient passé tout un jour dans le liquide indiqué par la seconde colonne du tableau. Dans la troisième colonne se trouve la valeur du raccourcissement produit par cette immersion, en centièmes de la longueur initiale ; la quatrième colonne donne la température à laquelle avait lieu, dans l'espace d'un quart de minute, un commencement appréciable de raccourcissement.

N°.	Liquide imbibé.	Raccourcissement avant le chauffage.	Température de début.
1	Eau	6.5 %	46.5
2	„	„	46.5
3	NaCl 0 6 %	9.8 %	57.0
4	„ „	9.8 %	58.0
5	Sucre de canne 24 %	8.5 %	52.0
6	1 Glycérine + 1 eau	10.3 %	49.5
7	Acide lactique 0.5 %	36.0 %	< 15.0
8	„ 0.25 %	39.0 %	< 15.0
9	Acide chlorhydrique 1 %	29.0 %	< 14

Tableau IIIb.

Influence d'un *raccourcissement thermique* antérieur sur la hauteur de la *température de début*, à charge égale, de 5 gr. Le chauffage auquel était dû le raccourcissement persistant avait eu lieu 1—2 heures auparavant et avait duré 5 minutes; sa hauteur est indiquée dans la colonne 3, tandis que dans la colonne 4 on trouve, en centièmes de la longueur primitive, la valeur du raccourcissement déterminé par ce premier chauffage. Dans la dernière colonne est inscrite la température la plus basse à partir de laquelle le raccourcissement commença lors du nouveau chauffage.

N°.	Liquide imbibé.	Température.	Raccourcissement atteint.	Température de début.
1	Eau	100°	65.0 %	< 9
2	„	75°	58.4	17°
3	„	55°	46.4	27°
4	„	47.5°	7.5	44°
5	„	45°	0	46.5
6	1 Glycérine + 1 eau	75°	56	< 14.0

Tableau IIIc.

Influence de la *charge* sur la hauteur de la température de début. Dispositions expérimentales les mêmes qu'en IIIa et b. Des segments égaux de la même corde *mi* furent chauffés très graduellement, sous des charges différentes. Avant de commencer à chauffer, on attendit chaque fois jusqu'à ce que la pointe du levier ne se déplaçât plus sensiblement dans le cours d'une minute.

N°.	Liquide imbibé.	Charge.	Température de début.
1	Eau	5 gr.	46.5
2	„	15 „	49.0
3	„	25 „	55.5
4	„	40 „	59.5
5	„	100 „	63.0
6	„	140 „	73.0
7	NaCl 0.6 %	5 „	57.0
8	„ „	100 „	73.0

IV.

Force développée dans le raccourcissement chimique et thermique.

Les expériences relatives à la force développée furent, elles aussi, faites le plus souvent sur des cordes *mi* de violon, épaisses de 0mm,6—0mm,65. Les segments employés, longs de 30mm, étaient par en bas serrés à vis dans la pince de la tige *a b* (fig. 1, p. 84), par en haut suspendus au moyen d'un crochet métallique à l'un des bras d'un levier d'aluminium, rigide, long de 200mm et mobile autour d'un axe horizontal, levier dont l'autre bras était pressé par un ressort d'acier. En suspendant au levier, au lieu de la corde, une série de poids, de 5—1000 grammes, on avait préalablement déterminé, et fait inscrire sur le cylindre du kymographion, les positions de la pointe du levier qui correspondaient aux différentes tensions. La distance entre le point d'application de la corde et l'axe de rotation était toujours si petite que, pour la longueur de corde choisie (30mm), il ne pouvait se produire qu'un raccourcissement tout à fait insignifiant (de 2—3% au plus). Les conditions correspondaient donc à peu près à l'isométrie pure.

Les cordes étaient d'abord suspendues sans tension, puis on soulevait sous elles un vase de verre, qu'au moment de commencer l'expérience on emplissait du liquide dans lequel devait avoir lieu l'imbibition ou le chauffage. Avant cet emplissage, on faisait inscrire sur le cylindre l'horizontale correspondant à la tension zéro, et on donnait ensuite à la corde une certaine tension initiale. Sur le cylindre on enregistrait alors de 5 en 5 minutes la position de la pointe du levier, ou bien, le cylindre tournant lentement, on notait de 5 en 5 minutes le temps, jusqu'à ce que dans le cours de 5 minutes il n'y eût plus de changement appréciable dans la longueur de la corde.

Tableau IVa

Force de raccourcissement développée par *imbibition* dans différents liquides, sous différentes tensions initiales et à température constante, basse.

No.	Liquide.	Tension en gr. après imbibition durant:											Raccourcissement (en centièmes) à la fin de l'exp.	Température.
		0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′		
1	Eau distillée	0	10	33	58	68	72	76	77	77	—	—	0.5	14.0
2	»	105	131	158	183	204	213	220	223	225	226	226	1.5	14.2
3	»	335	322	350	361	364	365	365	—	—	—	—	0.4	16.0
4	»	380	372	396	410	417	421	424	426	426	—	—	0.5	15.5
5	»	450	443	460	470	482	489	492	493	495	496	496	0.5	16.0
6	Acide lactique 0.25 %	0	28	62	81	97	105	110	110	110	—	—	1.3	16.7
7	»	5	30	41	76	91	100	108	115	115	—	—	1.4	15°
8	»	215	232	277	310	327	336	343	349	351	351	—	1.6	16°
9	»	425	436	460	478	483	489	490	490	—	—	—	0.8	16°
10	» 0.5 %	140	154	198	215	230	242	247	247	—	—	—	1.4	15°
11	» 2 %	70	132	180	200	215	222	228	232	235	238	240	2.4	12.5
12	Acide acétique 1 %	0	5	26	55	70	81	88	94	97	102	102	1.2	16.0
13	»	160	200	235	252	262	267	270	270	—	—	—	1.3	15°
14	»	575	563	587	598	600	601	601	—	—	—	—	0.3	16°
15	Hydrate de potasse 2 %	0	40	120	162	182	191	196	200	203	204	205	2.5	15.5°
16	»	140	152	198	245	266	280	288	296	300	302	302	1.9	15°
17	»	430	448	480	503	527	540	547	553	556	560	560	1.5	13°

Du tableau IVa il ressort, d'abord, que les forces raccourcissantes développées par imbibition à la température ordinaire peuvent atteindre des valeurs très élevées, beaucoup plus élevées que ne pourraient en développer les muscles humains, à section égale, par l'excitation tétanique la plus violente.

La comparaison avec les chiffres du Tableau Ia montre que, en général, les liquides dans lesquels les cordes non chargées se raccourcissent et s'épaississent le plus développent aussi, toutes choses égales d'ailleurs, la plus grande force lors de l'imbibition.

Mais le fait capital dont le tableau fournit la preuve, c'est que l'énergie mécanique développée par l'imbibition croît entre de larges limites avec la tension initiale, tout comme le fait la force musculaire.

Cette même dépendance de la tension initiale existe aussi pour le raccourcissement thermique, et cela non seulement chez des éléments histologiques biréfringents dès l'origine, mais aussi chez des corps (fibres élastiques, caoutchouc, gomme élastique) qui ne sont devenus sensiblement biréfringents qu'à la suite d'étirage. C'est ce que montrent les expériences du tableau suivant.

Tableau IVb.

Force de raccourcissement développée par *chauffage* à différentes températures, sous différentes tensions initiales.

N°.	Objet.	Liquide.	Tension initiale.	Tension en gr. atteinte à la température :								
				20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
1	Corde *mi*	Eau	0	0	0	0	12	28	52	68	72	75
2	»	»	285	270	246	210	180	160	154	165	181	195
3	»	Glycérine 50 %	0	0	0	0	0	23	50	62	64	65
4	»	Ac. lact. 0.25 %	5	9	11	20	45	72	91	100	109	—
5	»	»	90	89	87	84	89	96	118	125	—	—
6	»	»	125	123	120	116	116	120	148	154	—	—
7	»	Ac. acét. 1 %	5	15	18	25	57	83	98	105	—	—

N°.	Objet.	Liquide.	Tension initiale.	Tension en gr. atteinte à la température:								
				20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
8	(raccourcie dans l'eau à 100°)	Eau	0	8	18	25	29	35	42	47	52	60
9	»	»	50	53	56	63	68	79	91	100	112	125
10	(raccourcie dans la glycérine 50%, à 100°)	Glycérine 50%	150	153	161	165	169	173	176	179	181	—
11	Ligam. nuchae (4mmq de sect. transv.)	Eau	10	20	28	32	38	46	55	61	69	74
12	»	»	100	105	120	132	140	148	155	162	170	174
13	»	»	185	182	190	198	205	215	230	238	245	250
14	Caoutchouc vulcanisé, env. 2mmq de sect. transv.	»	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	»	»	90	90	92	94	97	101	105	110	118	124
16	Gomme élast., env. 2mmq de sect. transv.	»	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	»	»	175	115	177	180	183	188	190	192	—	—

Les expériences ont été exécutées de la même manière que celles du Tableau IVa. L'élévation de température fut produite en chauffant lentement, au moyen d'une flamme de gaz, le liquide contenu dans le vase de verre.

Les raccourcissements étaient enregistrés et les températures correspondantes notées, de 10° en 10°, sur le cylindre. La disposition réalisait de nouveau les conditions d'une isométrie presque parfaite. Les cordes à boyau, avant le commencement de l'expérience, étaient restées tout un jour plongées dans le même liquide dans lequel elles devaient être chauffées.

V.

Différences d'extensibilité des cordes à boyau normales ou raccourcies par voie chimique ou thermique.

L'accroissement de l'extensibilité des cordes à boyau, lors du raccourcissement par imbibition ou par chauffage, est un fait si frappant et si généralement connu, qu'il n'est pas besoin de nouvelles expériences pour le confirmer. Celles-ci deviennent toutefois nécessaires dès qu'il s'agit de questions spéciales, par exemple, de l'influence que la nature de l'objet susceptible d'imbibition, la nature du liquide imbibé, la température, etc. exercent sur la grandeur et le degré de perfection de l'élasticité. Dans les déterminations de ce genre interviennent d'une manière très appréciable, comme il était à prévoir, les phénomènes de l'élasticité résiduelle. Pour éliminer autant que possible leur influence, il faut donc donner, à toute expérience où il s'agit de comparer l'action de forces extensives inégalement grandes, une forme symétrique et, en outre, une durée aussi courte que possible.

A l'exemple de ce que M. J. Marey a fait pour le muscle, j'ai produit les différentes extensions du tissu que je voulais étudier, non pas en y suspendant des poids différents, mais par la tension variable d'un ressort en acier, qui agissait sur l'un des bras d'un levier, tandis que le tissu était relié à l'autre bras. Au moyen d'un excentrique métallique, on pouvait communiquer au ressort, en succession aussi rapide qu'on le voulait, toutes les tensions comprises entre 0 et 1000 grammes; à chaque instant, la tension existante se lisait sur un arc de cercle, le long duquel se mouvait un index fixé à l'axe de l'excentrique. On avait commencé par graduer l'instrument, en suspendant au second bras de levier, à la place du corps à étendre, des poids connus, et en déterminant ainsi la force de tension qui correspondait à chaque position de l'index.

Je me contenterai de rapporter, à titre d'exemples, quelques-unes de mes expériences. Vu son importance, le sujet demande des recherches spéciales et approfondies, dont l'exécution prendra encore beaucoup de temps.

A. Accroissement durable de l'extensibilité par la chaleur.

Corde à boyau de 100^{mm} de longueur et 0^{mm},63 d'épaisseur, ramollie pendant un jour dans NaCl à 10 ‰, et de ce fait raccourcie jusqu'à 96^{mm} et épaissie jusqu'à 1^{mm},0. Un segment de cette corde, mesurant 10^{mm} sous une tension initiale de 6 gr., est soumis 4 fois de suite, en ordre ascendant et descendant, à des variations de charge de 25, 50 et 75 grammes; les allongements qui en résultent, amplifiés 6,4 fois par le levier, s'inscrivent sur le cylindre, dont la surface enfumée s'avance de quelques millimètres après chaque mesure

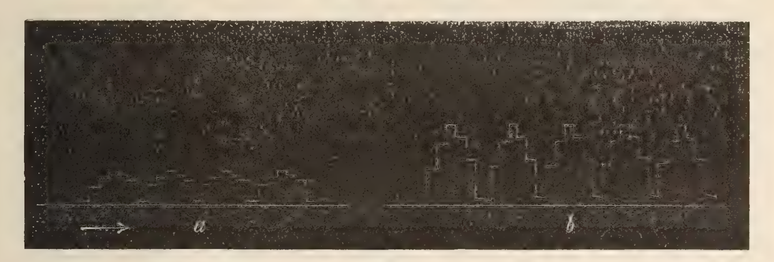


Fig. 4.

(tracés *a*). Le même segment, affranchi de toute charge, est ensuite chauffé pendant 5 minutes à 70° C, puis refroidi jusqu'à la température ordinaire. Il reste alors raccourci de façon durable, n'ayant plus, sous une charge de 6 gr., que 7^{mm} de longueur, mais une épaisseur de 2^{mm},4. Les allongements maintenant produits par des accroissements de charge de 25, 50 et 75 grammes sont inscrits, avec la même amplification que ci-dessus, 5 fois de suite, en ordre ascendant et descendant (tracés *b*). Chaque groupe d'expériences demandait

environ 14 secondes. Entre deux groupes successifs il y avait une pause de $\frac{1}{4}$ de minute. Les tracés doivent être lus de gauche à droite.

La mesure des ordonnées donne les nombres consignés dans le tableau suivant. Les déterminations des 1e, 3e etc. lignes horizontales se suivent, dans l'ordre des temps, de gauche à droite, celles des 2e, 4e etc. de droite à gauche. En tête de chaque colonne est inscrite la tension en grammes qui a produit les élévations, notées en millimètres dans cette colonne, de la pointe inscriptrice au-dessus de sa position initiale.

a. Extensibilité avant le chauffage (longueur initiale = 10^{mm}).

Ordre des expériences.	Force extensive.			
	0	25	50	75 g
1	0	2.2	3.4	4.3
2	0.5	3.0	3.8	4.4
3	0.4	2.6	3.6	4.3
4	0.3	3.1	4.0	4.4
5	0.3	2.6	3.5	4.3
6	0.3	3.1	3.8	4.3
7	0.3	2.6	3.5	4.3
8	0.3	3.1	3.8	4.3

Valeur moyenne:	0,3	2,76	3,82	4,33	mm.
correspondant aux valeurs absolues de l'extension:	0,007	0,431	0,597	0,675	mm.
ou, en centièmes de la longueur initiale:	0,47	4,31	5,97	6,75	%.

b. Extensibilité après le chauffage (longueur initiale = 7 mm.

Ordre des expériences.	Force extensive.			
	0	25	50	75 g
1	0	4.6	8.0	10.6
2	0.8	6.0	8.8	10.8
3	0.5	5.1	8.3	10.6
4	1.0	6.0	8.4	10.7
5	0.8	5.2	8.4	10.6
6	1.2	6.1	9.0	10.7
7	1.0	5.4	8.5	10.6
8	1.3	6.1	9.1	10.6
9	1.1	5.5	8.4	10.6
10	1.3	6.2	9.0	10.6

Valeur moyenne:	0,9	5,62	8,64	10,64	mm.
correspondant aux valeurs absolues de l'extension:	0,14	0,878	1,35	1,66	mm.
ou, en centièmes de la longueur initiale:	2,20	12,5	19,3	23,7	%.
et après réduction à la même section transv. d'un mmq.	4,8	30,0	46,3	56,9	%.

B. Extensibilité différente, à des températures différentes, de cordes ayant subi par la chaleur un raccourcissement durable.

Exemple d'expérience. Bout de corde *mi*, immergé, pendant 4 jours dans une solution à 0,6 % de sel marin, où il s'est raccourci de 100^{mm} à 90^{mm} et épaissi de $0^{mm},63$ à $1^{mm},3$. Le segment employé présente, sous la tension initiale de 25 gr., une longueur de 35^{mm}. Il est maintenu pendant 5 minutes,

dans la même solution de sel marin que ci-dessus, à la température de 65°: raccourcissement à 29mm,5 (sous une charge de 25 gr.), épaississement à 2mm. Sur ce segment sont ensuite exécutées, d'abord à 67°, puis à 17°, des expériences d'extensibilité semblables à celles décrites en A. Nous ne donnons que les valeurs moyennes des résultats de 4 séries d'expériences ascendantes et descendantes:

a. Extensibilité à 67° (au bain-marie).
Longueur initiale, sous une charge de 35 gr.: env. 30mm.

Charge:	35	45	55	65	75 gr.
Allongement:	0	0,9	1,8	2,6	3,1 mm.
ou, en centièmes de la longueur initiale:	0	3,0	6,0	8,7	10,3 %.

b. Extensibilité à 17° C.
Longueur initiale montée, par suite du refroidissement, à 33mm sous la charge de 25 gr.

Charge:	25	35	45	55	65	75 gr.
Allongement:	0,25	0,50	0,72	0,90	1,1	1,2 mm.
ou, en centièmes de la longueur initiale:	0,75	1,50	2,16	2,7	3,3	3,6 %

C. Accroissement de l'extensibilité par imbibition dans l'acide lactique.

Exemple d'expérience. Bout de corde *mi*, ramolli pendant une heure dans l'eau à 18° C, raccourci de 100mm à 95mm,5, épaissi de 0mm,63 à 0mm,9.

Dispositions expérimentales comme ci-dessus, sauf que le levier amplifiait 10 fois.

a. Extensibilité avant l'action de l'acide lactique.

Longueur du segment employé:
10^{mm} sous la charge initiale de 6 gr.

Augmentation de charge	0	50	100	200	400	750	1000 gr.
	0	2,0	4,0	7,3	14,0	20,5	26,5
	0	1,9	4,0	7,5	15,1	22,0	26,7
Allongement moyen: en centièmes de la longueur initiale (10^{mm}).		1,95	4,0	7,4	14,55	21,55	26,6

Le même segment est ensuite mis, sans charge, pendant deux heures, dans 200^{cc} d'acide lactique à 0,5% et 17° C. Il s'y raccourcit de 10^{mm} à 7^{mm} et s'épaissit de 0^{mm},9 à environ 2^{mm},4, sous une charge de 6 gr.

b. Extensibilité après l'action de l'acide lactique.

Longueur : 7^{mm}. Tension initiale: 6 gr.

Augmentation de charge	0	50	100	200	400	750	1000 gr.
	0	2,0	4,0	7,0	14,6	24,3	34,2
	0	2,0	4,0	7,3	15,1	24,7	34,3
Allongement moyen en dixièmes de millimètre:		2,0	4,0	7,15	14,85	24,5	34,25
ou, en centièmes de la longueur initiale (7^{mm}):		2,9	5,7	10,2	21,2	35,0	48,9%

VI.

Influence de l'échauffement et du refroidissement sur la longueur de fibres musculaires mortes.

Le premier échauffement avait lieu, comme dans les expériences correspondantes sur les cordes, en élevant graduellement la température du bain-marie où était plongé le muscle, qui agissait, sous une charge modérée, sur un levier long de

250^{mm}; le refroidissement, dont le début est indiqué dans la dernière colonne des tableaux par F, se faisait à l'air, après que le bain-marie avait été abaissé et enlevé. Un nouvel échauffement (C) s'obtenait par brusque immersion dans l'eau chaude.

a. Ventricule du cœur de *Rana esculenta*, raidi par échauffement prolongé à 45° C. La base est serrée dans la pince, le sommet traversé par un petit crochet, qui agit sur le levier à 5^{mm} de l'axe de rotation de celui-ci. Charge 3 gr. Longueur du segment musculaire actif 10^{mm}. — Température initiale 15° C.

Temps.	Température.	Position de la pointe du levier.	Raccourcissement en centièmes.	Observations.
10^h 42′	20°	0	—	
„ 44′	40°	— 4.5	—	
„ 47′	68.5°	+ 9	—	
„ 48′	77.0°	+ 12.5	10 %	10^h 48′ F
„ 48′ 30″	—	+ 7.5	—	
50′	—	+ 3.0	—	
51′ 30″	68.0°	+ 9.2	7.4 „	„ 51′ C
52′	—	+ 3.0	—	„ 51′ 30″ F
53′	60.0°	+ 7.2	3.4 „	53′ C
55′	—	+ 2.3	—	53′ 30″ F
56′	70.0°	+ 7.8	6.3 „	56′ C
59′	—	+ 0	—	56′ 30″ F
11^h 0′	78.0°	+ 11.5	9.2 „	11^h 0′ C
5′	—	+ 1.2	—	„ 0′ 30″
10′	—	0	—	
11′	75.0°	+ 8.4	6.6 „	„ 11′ C
14′	—	0	—	„ 11′ 30″ F
15′	62.0°	+ 5.5	4.4 „	„ 15′ C
19′	—	— 0.3	—	„ 15′ 30″ F

b) *Sartorius de R. esculenta.* Perimysium extérieur enlevé. Muscle séché pendant 2 jours à l'air, puis ramolli dans l'eau distillée. Fixé comme le cœur en a. Charge 5 gr. — Longueur 30 mm.

Temps.	Température.	Position de la pointe du levier.	Raccourcissement en centièmes.	Observations.
10h 4′	19.7°	0	—	
„ 8′	59.0°	— 4.1	—	
„ 10′	61.0°	— 3.4	—	
„ 15′	65.0°	+ 4.2	—	
„ 20′	68.0°	+ 19.0	—	
„ 24′	70.0°	+ 35.0	7.2	10h 24′ 10″ F
„ 26′	—	+ 26.5	—	
„ 34′	20°	0	—	„ 32′ Levier mis sur 0.
„ 35′	48.2°	+ 5.3	1.4	„ 35′ C
„ 37′	—	0	—	„ 36′ F
„ 38′	45.0°	+ 4.0	1.1	„ 38′ C
„ 41′	—	— 0.3	—	„ 38′ 30″ F
„ 43′	64°	+ 9.3	2.5	„ 43′ C
„ 48′	—	+ 1.9	—	„ 43′ 10″ F
„ 49′ 50″	80°	+ 32.0	8.8	„ 49′ 40″ C
„ 50′	—	+ 14.5	—	„ 50′ F
„ 56′	—	+ 12.0	—	

c) *Adductor femoris de R. esculenta.* Durci pendant 2 jours dans l'alcool à 90%. Depuis 2 heures dans l'eau distillée. — Longueur 10^{mm}, épaisseur 5^{mm}. Attaches comme en b. Charge 10^{gr}.

Temps.	Température.	Position de la pointe du levier.	Raccourcissement en centièmes.	Observations.
9h 40′	17°	0		
„ 45′	„	— 0.1		
„ 47′	23.0°	— 0.2		
„ 49′	36.0°	— 1.0		
„ 51′	48.0°	— 2.0		
„ 53′	60.3°	— 2.3		
„ 54′	66.0°	— 1.2		
„ 56′	75.0°	+ 5.9		
„ 58′	75.5°	+ 9.3		
„ 59′	78.0°	+ 11.0	17.6 %	9h 59′ 10″ Refroidissement comme ci-dessus.
10h 0′	—	+ 7.0		
„ 1′	—	+ 2.5		
„ 5′	80°	+ 7.0		10h 5′ Immersion dans l'eau à 80°, puis chauffage graduel.
„ 6′	85°	+ 9.0		
„ 7′	90°	+ 11.5		
„ 8′	95°	+ 14.3		
„ 9′	95.5°	+ 17.0	13.6 %	

VII.

Expériences sur l'effet mécanique de la chaleur lors du raccourcissement thermique du caoutchouc.

Ces expériences avaient pour but de rechercher quelle fraction de la chaleur peut, dans les conditions les plus favorables, être transformée en travail mécanique dans le cas d'une masse de caoutchouc devenue par étirage thermiquement contractile. Pour cela, il fallait connaître dans chaque expérience: la chaleur spécifique, à longueur constante, du caouchouc

du caoutchouc employé, les températures absolues entre lesquelles avaient lieu le chauffage et la production de travail, la grandeur de la charge et la hauteur d'élévation.

Pour la chaleur spécifique j'ai adopté, en chiffre rond, la valeur 0,5, d'après la détermination faite par M. Danilewski [1]) sur du caoutchouc noir, couleur qu'avait aussi l'espèce qui m'a servi. Comme il ne s'agissait, dans les présentes recherches, que de valeurs approximatives, je n'ai pas exécuté de déterminations propres sur cette espèce. Quand même, au lieu de 0,5, on prendrait une valeur de 20% plus élevée, cela ne changerait rien d'essentiel aux résultats.

Mon caoutchouc était en fils ou cordons régulièrement prismatiques et de qualité très égale, tels qu'aujourd'hui on les fabrique partout, pour toutes sortes d'usages.

Ces fils étaient tendus, à la place de la corde à boyau, dans l'appareil décrit précédemment; la longueur du segment qui devait fournir le travail était mesurée avec soin, en l'absence de toute charge, et de cette longueur, combinée avec le poids d'un bout plus long du même fil, on déduisait le poids de la masse qui par échauffement produisait le travail. Tout près du fil, mais sans le toucher, se trouvait le réservoir d'un thermomètre centigrade. L'échauffement avait lieu de la manière suivante: un vase de verre, d'environ 8^{cm} de hauteur et 5^{cm} de largeur, rempli d'eau à la température supérieure voulue, était soulevé lentement — pour éviter les mouvements brusques du levier inscripteur — autour de la tige portant le fil de caoutchouc; au bout d'environ 1 minute, ce vase était retiré et remplacé par un autre, plus grand et rempli d'eau à la température ordinaire, dans lequel le fil restait environ 3 minutes, jusqu'à l'expérience suivante. Comme les fils, sous les charges qu'ils devaient subir pour donner la plus grande somme possible de travail, s'étendaient assez fortement, jusqu'à

---

[1]) B. Danilewski, *Thermodynamische Untersuchungen der Muskeln*, dans Pfluger's *Archiv.*, T. XXI, 1880, p. 109.

plus de trois fois leur longueur à l'état de non-extension, et que par suite ils devenaient très minces ($\frac{1}{2}$ mm et moins), ces courtes durées d'immersion suffisaient pour les amener chaque fois assez exactement à la température désirée. Cela ressortait directement du fait que, vers la fin de chaque terme, la longueur du fil restait constante.

Les variations de longueur étaient inscrites, ordinairement amplifiées $12\frac{1}{2}$ ou 25 fois, par la pointe du levier sur du papier glacé enduit de suie. L'extension s'obtenait au moyen de poids suspendus au long bras du levier. Le fil de caoutchouc tirait sur le bras court, à 2^{cm} de distance de l'axe de rotation. Les charges qui, à température égale, donnaient le maximum de travail devaient être trouvées, pour chaque objet, par voie de tâtonnement. Cela aussi ne se faisait qu'approximativement. Les valeurs obtenues pour le travail restent donc, en général, *au-dessous* du maximum possible, ce qui rend nos résultats encore plus probants. Dans les tableaux n'ont été admises que les expériences où un vrai cycle a été parcouru, où de plus, après refroidissement à la température initiale, la longueur du fil, sous charge égale, était exactement la même qu'à l'origine. Tel n'est pas toujours le cas; le retour à la longueur primitive n'a pas lieu, par exemple, lorsque entre deux expériences successives on a changé passagèrement la tension. C'est un point sur lequel nous reviendrons plus loin, au n°. VIII.

En cas de refroidissement rapide, on observe souvent que l'abaissement d'abord rapide de la pointe écrivante du levier cesse tout à coup et est suivi d'une courte ascension. Evidemment, le poids, par sa descente rapide, plus rapide que ne le comporte le changement de forme dépendant du refroidissement, occasionne une extension du fil, laquelle produit de la chaleur et, par suite, un raccourcissement passager. Si on laisse s'inscrire ces mouvements sur le cylindre tournant, il peut en résulter des tracés qui rappellent les courbes des secousses des muscles intoxiqués par la vératrine, chez lesquels, dans le stade de l'énergie décroissante de la première

et rapide secousse, commence une seconde contraction, lentement ascendante et descendante. Il y aurait de l'intérêt à examiner si la similitude des deux cas est simplement une analogie apparente, extérieure.

Dans les tableaux suivants, P désigne la force étirante, en grammes, H la hauteur en millimètres à laquelle ce poids a été élevé par l'échauffement du fil de la température (absolue) T_2 à T_1. Q est la quantité totale de chaleur, exprimée en microcalories (mcal.), qui a été absorbée par le caoutchouc durant cet échauffement. Si Q_1 représente en mcal. la quantité de chaleur équivalente au travail produit $P\,H$, $s = 0{,}5$ la chaleur spécifique du caoutchouc à longueur constante, p le poids en milligrammes du segment qui a exécuté le travail, on a $Q = p.s\,(T_1 - T_2) + Q_1$. Dans l'avant-dernière colonne de chaque tableau est indiquée la fraction de Q qui a passagèrement été convertie en travail, la dernière colonne donne le rapport de cette fraction au maximum possible lors d'un cycle réversible, c'est-à-dire le rapport à $Q_0 = Q\,\frac{T_1 - T_2}{T_2}$.

Les fils de caoutchouc employés dans les expériences des tableaux VII *a b c* étaient de section transversale exactement carrée et, en l'absence de charge, épais d'un peu plus de 1^{mm}. Des bouts de 100^{mm} de longueur pesaient 0,152 gr. Le segment actif, toujours pris de façon à avoir sans charge une longueur de 4^{mm}, demandait donc, pour qu'à longueur constante sa température s'élevât de 1° C, 3,04 microcalories; on fait abstraction, et cela est permis ici, des variations éventuelles de la chaleur spécifique avec la température absolue.

Tableaux VII a et b.

Fractions de la chaleur absorbée qui sont converties en travail mécanique lors du raccourcissement thermique d'un même fil de caoutchouc, *soumis à des charges différentes.* Raccourcissement à peu près isotonique. Les expériences isolées

ont eu lieu à d'assez longs intervalles et dans un ordre qui n'est pas exactement celui du tableau. $T_2 = 273° + 20° = 293°C$.

Tableau VII a.

No.	P en gr.	H en mm.	$T_1 - T_2$	Q (en m. cal.)	Q_1 (en m. cal.)	Q_0 (en m. cal.)	$\frac{Q_1}{Q}$
1	75	0.12	11.0	33.7	0.02	1.30	0.0006
2	100	1.40	12.0	36.8	0.33	1.49	0.009
3	150	2.24	12.0	37.3	0.79	1.52	0.021
4	„	1.92	11.0	34.4	0.68	1.41	0.020
5	200	1.40	9.3	29.0	0.66	0.92	0.023
6	250	1.00	10.5	32.5	0.59	1.16	0.018

On voit, par ce tableau, que les raccourcissements déterminés par un même échauffement croissent d'abord à mesure que la charge augmente, pour décroître ensuite; il en est de même du travail mécanique produit. Celui-ci atteint, pour une charge de 200gr., l'équivalent de 2,3 % de la chaleur totale fournie.

Des valeurs encore plus fortes ont été données par les expériences consignées dans le Tableau VII b. Dans les expériences 1 et 2, 5 et 6, T_2 était $= 293°$, dans les expériences 3 et 4, $= 293°$. P généralement $= 150$gr.

Tableau VII b.

No.	H en mm.	$T_1 - T_2$	Q	Q_1	Q_0	$\frac{Q_1}{Q}$
1	2.24	10.5	32.7	0.79	1.14	0.036
2	2.00	9.3	29.0	0.70	0.92	0.032
3	2.88	10.0	31.4	1.01	1.08	0.032
4	2.30	8.8	30.4	0.80	0.81	0.027
5	1.76	8.0	24.9	0.62	0.69	0.025
6	1.62	7.5	23.4	0.58	0.61	0.025

D'après ces nombres, il a été converti en travail jusqu'à 3,6 % de la chaleur fournie (No. 1).

Le tableau VII c donne un aperçu de la manière dont les choses se passent quand l'apport de chaleur varie entre des limites plus larges. La charge était de 225gr., $T_2 = 290°$. Les expériences ont été faites suivant l'ordre indiqué par le tableau et dans des périodes successives de 4 minutes.

Tableau VII c.

No.	H	$T_1 - T_2$	Q	Q_1	Q_0	$\frac{Q_1}{Q}$
1	4.24	30.0	93.4	2.24	9.1	0.024
2	2.80	21.0	65.3	1.46	4.5	0.022
3	1.44	11.0	34.5	0.76	1.3	0.022
4	1.32	10.0	31.1	0.70	1.1	0.023
5	1.32	10.0	31.1	0.70	1.1	0 023
6	2.32	20.0	62.0	1.23	4.3	0.020
7	4.72	33 5	104.2	2.40	12.7	0.023
8	3.04	23.0	71.5	1.60	5.6	0.022
9	1.32	10	31.1	0.70	1.1	0.022

Il ressort de cas nombres que, dans les conditions indiquées, les hauteurs de soulèvement et par suite le travail croissaient à peu près proportionnellement à la différence $T_1 - T_2$; que, par conséquent, des quantités de chaleur absorbées il a toujours été converti passagèrement en travail à peu près la même fraction, soit 2,2%.

VIII.

Influence d'une charge antérieure, plus forte ou plus faible, sur la grandeur du raccourcissement thermique de cordes à boyau et de fils de caoutchouc.

Ainsi qu'il a été remarqué en VII, un fil de caoutchouc raccourci par la chaleur ne reprend pas nécessairement sa longueur primitive lorsque, *sous la même charge*, il est refroidi jusqu'à la température primitive. Si, par exemple, il a été fortement étendu avant d'être chauffé, la contraction par chauffage est, en valeur absolue et relative, plus grande et plus énergique qu'elle ne l'eût été sans cela; mais alors, refroidi sous la même charge, le fil ne s'allonge plus jusqu'à sa longueur initiale. L'extension préalable a produit en lui, à ce qu'il semble, une réserve de forces de tension, qui sont consommées lors du chauffage postérieur: le caoutchouc est en quelque sorte devenu irritable, tandis qu'antérieurement il n'était que contractile. Dans cet état, il présente donc une analogie plus grande avec une corde encore vierge et avec un muscle vivant. Aussi, quand le caoutchouc a été étiré, même fortement, on réussit, par le chauffage, à le ramener dans un état où il peut, entre de larges limites de température et de charge, réagir en cycle thermodynamique. Il est très remarquable, toutefois, qu'après une forte extension passagère la contractilité thermique (à charge égale) peut rester, de manière permanente, notablement accrue.

L'influence d'un allégement préalable est de tout point opposée à celle d'une charge plus forte.

Les mêmes phénomènes, mais à un moindre degré, s'observent chez les cordes à boyau qui par imbibition ou chauffage ont subi un raccourcissement durable et sont devenues extensibles à la façon du caoutchouc.

Quelques exemples suffiront. Chez un même objet on commençait par mesurer plusieurs fois de suite, à des intervalles de 4 minutes, l'influence d'un échauffement déterminé, $T_1 - T_2$, sur la hauteur de soulèvement H d'une certaine charge; ensuite, on suspendait au levier, pendant 1 minute, un poids plus lourd ou, respectivement, plus léger; puis, la charge antérieure étant rétablie, on chauffait de nouveau plusieurs fois de suite, comme précédemment. Pour tout le reste, la disposition était la même que dans les expériences de l'Appendice VII.

Les changements de longueur (x) qui restaient dans chaque expérience après l'action du changement de charge, ou après le refroidissement complet, sont notés (en mm.) dans la dernière colonne des tableaux suivants: les raccourcissements sont affectés du signe —, les allongements, du signe +

Tableaux VIII a et b.

Expériences sur des cordes *mi* gonflées par imbibition dans l'eau bouillante, et y ayant subi un raccourcissement durable d'environ 50 %.

Tableau VIIIa.

N°.	P en gr.	H en mm.	$T_1 - T_2$	x en mm.
1	15	1.44	23.5	0
2	„	1.60	25.0	
3	150	—	—	+ 1.90
4	15	2.24	23.5	— 0 96
5	„	1.48	25.5	— 0.04
6	„	1.36	„	0

Observations.

Longueur initiale de la corde sans charge 26.4 mm.
avec 15 gr. de charge env. 29.6 „
avec 150 gr. de charge env. 34.4 „
T_2 dans les exp. 1 — 6 = 289°.5 (273 + 16°.5 C).

L'influence d'une charge passagèrement soit plus forte, soit plus faible, est mise surtout en évidence par le

Tableau VIIIb.

Autre segment de la même corde, long, sans charge, de $26^{mm},0$. $T_2 = 273 + 18 = 291°$ C.

N°.	P en gr.	H en mm.	$T_1 - T_2$	x en mm.	N°.	P en gr.	H en mm.	$T_1 - T_2$	x en mm.
1	40	1.52	23.5	0	11	40	1.24	20.6	0
2	„	1.36	22.7	0	12	160	—	—	+ 1.12
3	„	1.32	22.5	0	13	40	**2.12**	20.8	— 0.72
4	160	—	—	+ 1.74	14	„	1.24	20.6	0
5	40	**2.12**	21.2	— 0.80	15	10	—	—	— 5.24
6	„	1.32	21.0	— 0.04	16	„	6.24	20.8	— 3.72
7	„	1.24	20.7	0	17	40	—	—	+ 6.24
8	250	—	—	+ 3 60	18	„	**0.48**	22.0	+ 0.88
9	40	**2.20**	20 5	— 0.84	19	„	1.12	20.7	+ 0.20
10	„	1.36	20.7	— 0.08	20	„	1.17	20.8	0

L'influence d'une extension ou d'une décharge préalables apparaît de manière encore beaucoup plus frappante chez le caoutchouc, et ici s'accusent très fortement aussi les changements *durables* de la force raccourcissante. A titre d'exemple, je rapporterai quelques expériences faites sur un segment, long de 4^{mm} sans charge, du même fil de caoutchouc noir qui a fourni la matière des expériences communiquées en VII. — Durant toute la série actuelle, T_2 fut de 291° (= 18° C). Entre les expériences 7 et 8 il y eut une pause plus longue, pendant laquelle agit la charge de 150^{gr}.

Tableau VIIIc.

Longueur du fil de caoutchouc sous la charge de 90gr et à la température de 18° C: environ 10mm.

N°.	P en gr.	H en mm.	$T_1 - T_2$	x en mm.	N°.	P en gr.	H en mm.	$T_1 - T_2$	x en mm.
1	90	0.48	21.0	0	13	150	2.56	21.0	— 0.32
2	„	0.48	„	0	14	„	2.28	„	0
3	„	0.48	„	0	15	„	2.24	„	0
4	290	—	—	+ 1.84	16	250	—	—	+ 5.30
5	90	**0.80**	21.0	— 0.24	17	150	**7.68**	21.0	— 5.30
6	„	0.51	„	— 0.08	18	„	2.32	„	0
7	„	0.60	„	— 0.06	19	„	2 28	„	0
8	150	0.96	20.8	0	20	„	2.26	„	0
9	„	0.96	21.0	0	21	25	—	—	— 3.5
10	„	0.96	„	0	22	150	**1.64**	21.0	+ 0.09
11	250	—	—	+ 10.4	23	„	1.68	„	+ 0.01
12	150	**8.00**	21.0	— 6.32	24	„	1.68	21.5	0

Des phénomènes analogues à ceux dont il vient d'être question se laissent observer aussi chez les muscles vivants. M. R. Heidenhain [1]) avait déjà remarqué qu'après l'extension d'un muscle au repos le travail et le dégagement de chaleur étaient très régulièrement un peu accrus. Dans quelques-unes de ses expériences, rapportées plus en détail (gastrocnémien de grenouille excité sous une charge de 30gr, avant et après l'extension, durant une minute, par une charge de 200gr), l'accroissement dû à l'action préalable de la charge plus forte s'élevait, pour le travail comme pour la chaleur, jusqu'à plus de 10 % de la valeur initiale. Dans les expériences de M. F. Schenck [2]), aussi, „une courte augmentation de tension a pu

[1]) *l. c.*, p. 83.

[2]) F. Schenk, *Beiträge zur Kenntniss von der Zusammenziehung des Muskels*, dans Pflüger's *Archiv*, T. L, 1891, p. 173.

accroître la hauteur de soulèvement." M. C. G. Santesson [1]) dit: „qu'une contraction isotonique, exécutée immédiatement après une contraction auxotonique, est très souvent plus élevée qu'une autre isotonique, exécutée avant l'auxotonique. Cette dernière paraît causer un accroissement d'excitabilité de courte durée." M. J. von Kries [2]) fait ressortir qu'à la fin de la première contraction opérée après extension préalable plus forte, „le muscle n'atteint plus sa longueur initiale, mais reste notablement plus court. La seconde contraction présente fréquemment la même propriété, et il est en souvent encore de même, à un faible degré, pour plusieurs des suivantes (cela dépend de l'intensité des extensions préalables et de la force des contractions)." On peut rapprocher de ces assertions les nombres de la dernière colonne de nos tableaux, qui disent la même chose pour les cordes à boyau et pour le caoutchouc.

---

[1]) C. G. Santesson, *Studien über die allgemeine Mechanik des Muskels*, dans *Skand. Arch. f. Physiol.*, T. III, 1891, p. 408.

[2]) J. von Kries, *Untersuchungen zur Mechanik des quergestreiften Muskels*, dans *Arch. f. (Anat. u.) Physiologie*, 1880, p. 348.

EXPÉRIENCES SUR LA FORMATION DE FISSURES, DE CAVITÉS ET NOYAUX PIERREUX DANS LES CÔNES DE DÉBRIS.

PAR

H. BEHRENS.

I. Expériences sur des masses fondues.

Les observations de von Hochstetter sur des cônes éruptifs de soufre, préalablement fondu à l'aide de vapeur d'eau surchauffée [1]), semblent n'avoir été répétées et poursuivies que par un petit nombre d'auteurs. Des expériences que je fis moi-même dans ce but, il y a plusieurs années, me donnèrent un résultat peu satisfaisant. Sans appareil de grandes dimensions, il n'y avait rien à entreprendre avec le soufre. Il était permis d'attendre que les sels hydratés, facilement fusibles, se laisseraient traiter d'une manière moins ingrate. Et en effet, les expériences entreprises avec eux réussirent sans peine; celles avec l'acétate de plomb réussirent le plus facilement et le mieux. Le sel est soumis avec précaution à la fusion dans une capsule de platine ou d'argent. Dès que, par refroidissement, une croûte s'est formée à la surface, on chauffe un espace restreint du fond de la capsule à l'aide d'une pointe portée au rouge, ou d'une petite flamme aigue. Les éruptions commencent à se produire aussitôt. Il ne faut pas songer ici à saupoudrer la croûte de matières colorantes, puisque l'éruption marche beaucoup plus rapidement que chez les objets

[1]) N. Jahrb. 1871, 469.

observés par v. Hochstetter. On jouit en revanche de cet avantage que la masse est transparente et, peu de temps après la fin des éruptions, assez molle pour permettre d'en faire de bonnes coupes. Ce que l'on voit dans ces expériences ne peut servir qu'en partie à confirmer les conclusions, à grande portée, établies tantôt par v. Hochstetter lui même [1]), tantôt par d'autres [2]), sur les observations de cet auteur.

S'appuyant sur ses expériences avec le soufre, von Hochstetter se représente un volcan en activité comme un cône creusé d'une large cavité pyriforme, dont la pointe terminale se prolonge en la cheminée du cratère. La cavité prendrait naissance par fusion répétée de masses de lave déjà durcie, et s'élargirait à mesure que le volcan s'accroît lui même. Elle peut être la cause d'effondrements, et par là de la formation de larges chaudières cratériformes et de cirques volcaniques. Si elle se remplit d'autre part de masses laviques compactes, il se produira des dômes éruptifs (les „volcans homogènes" de v. Seebach), que l'on mettait jusqu'à présent sur le compte de masses de laves visqueuses, qui se seraient fait jour d'un seul coup. Qu'une nouvelle fusion puisse avoir lieu dans l'intérieur d'un cône volcanique, c'est ce qui ne peut faire l'objet d'un doute depuis ce que M. Dana a rapporté au sujet des phénomènes de fusion dans le cratère du Kilauea. Il est au contraire franchement douteux, à en juger par de nombreuses observations plaidant contre, que cette fusion secondaire se produise couramment, et accompagne la majorité des éruptions volcaniques. Le métamorphisme de contact présenté par les inclusions de grès, de schiste, de calcaire dans les roches éruptives est souvent si peu accusé, les faces en contact dans deux roches éruptives contigues ont été trouvées, en plus d'une circonstance, si nettes, qu'il faut ranger une fusion étendue, à la rencontre de lave liquide, parmi les événements très rares.

---

[1]) l. c. 474—477. [2]) Ainsi Verbeek dans »Krakatau".

Une belle occasion de vérifier l'exactitude des idées de v. Hochstetter se présenta au mois d'août 1883, lors de l'éboulement partiel du pic Rakata dans l'île de Krakataua. M. Verbeek, qui avait fait, dans la représentation donnée par lui de l'éruption du Krakatau, un large usage de la théorie des fusions répétées, semble avoir été étonné et quelque peu embarrassé de ce que lui révéla l'examen de la muraille verticale du pic. Celui-ci était, à n'en pas douter, un volcan stratifié; l'éboulement avait affecté à peu près le milieu du cône, et cependant il n'apparaissait ni cavité pyriforme, ni noyau massif de roches éruptives. Des considérations dignes de remarque sont jointes à cet exposé de faits [1]: „Le pic était „jadis un cône pointu, sans cratère d'effondrement. Comme „une liquéfaction à l'intérieur du manteau doit être considérée „comme la cause de l'effondrement des volcans, je ne crois „pas improbable qu'une fusion interne étendue n'a eu lieu que „dans les volcans à effondrement central. Les volcans restés „debout sous forme de cônes réguliers n'auraient pas subi „cette fusion interne, ou ne l'auraient subie que sur une petite „échelle."

L'hypothèse d'après laquelle les cavités centrales du cône prendraient naissance par une nouvelle fusion de substances déjà durcies, n'est d'ailleurs corroborée ni par les expériences de v. Hochstetter avec le soufre, ni par les miennes propres avec l'acétate de plomb et de sodium. v. Hochstetter rapporte que les cavités étaient tapissées d'élégants cristaux de soufre, tels que j'en ai obtenus aussi en quantité dans mes modèles plus petits et moins parfaits. Mais une fusion du cône par le centre devrait détruire des cristaux en saillie, et créer des surfaces unies et fondues. On se convaincra facilement de la vérité de cette assertion en enfonçant un fil métallique chauffé dans une masse cristalline creuse de soufre. Il est manifeste que le noyau liquide a, dans les expériences de von Hochstetter,

---

[1]) Krakatau, p. 162.

déposé du soufre solide, au lieu de provoquer une fusion plus étendue.

Pour qu'une liquéfaction puisse se produire dans une cavité, il faut que le masse liquide qui y pénètre soit chauffée au-dessus du point de fusion de la matière environnante. Elle devra l'être d'autant plus que la viscosité et la faible conductibilité de la masse rendent la propagation de la chaleur plus difficiles. Cette considération doit faire conclure que la fusion, au contact de lave liquide, des roches environnantes, ne se présentera pas fréquemment. On en déduira de même qu'une liquéfaction si étendue des matériaux voisins, que les produits de la fusion, et ce qui résulte de leur mélange avec la lave, donneraient naissance à des variétés spéciales de roches pyrogénées, rentre toute entière dans le champ des hypothèses faciles. J'ai, à propos des questions ici traitées, porté longuement, et d'une manière toute spéciale, mon attention sur les inclusions dans les roches volcaniques. Rarement on y rencontre une enveloppe vitrifiée ou des stries dans leur voisinage; pas même lorsqu'il s'agit de minéraux fusibles à la flamme du chalumeau, comme par exemple la sanidine, que l'on rencontre à l'état friable, mais sans zone de fusion tout autour, dans les laves de Niedermendig et les bombes volcaniques des „Dauner Maare". L'effritement d'une roche réduite à cet état, l'entraînement mécanique et la dissolution qui en sont la conséquence, doivent laisser, dans une lave quelque peu visqueuse, des traces sous forme de taches, de veines et de stries, que l'on rencontre en effet de temps en temps dans l'étude des roches volcaniques, mais nullement d'une manière courante. On peut s'attendre, en somme, à ce qu'un rétrécissement de la poche du cratère, par le dépôt de croûtes laviques, se produira tout aussi souvent qu'un élargissement par le départ de masses fondues.

L'accroissement supposé de la cavité par une liquéfaction continue à l'intérieur du cône en voie d'extension, est tout aussi problématique que sa naissance par le même procédé.

Les cônes transparents d'acétate de plomb permettent de reconnaître nettement que la masse liquide interne, toute en effervescence, produit de grosses bulles. Le cône se rompt et se soulève; quelquefois une portion considérable du sommet se détache, et se trouve jetée sur le côté sous la poussée de la masse visqueuse. A l'intérieur on découvre une matière plus ou moins celluleuse, traversée d'une canal assez étroit, contourné à plusieurs reprises, élargi de place en place d'une façon irrégulière. L'acétate de sodium produit une paroi plus dense, un canal plus large; par contre il est plus difficile d'en obtenir des cônes de quelque dimension. Si par une surchauffe brusque et locale de la masse on provoque des phénomènes de fusion forcée, c'est dans les couches profondes que ces phénomènes, chez les deux sels, se montreront tout d'abord. On ne peut d'ailleurs guère attendre autre chose. Tantôt c'est le fond tout autour du cône, tantôt le pied de celui-ci qui entre en fusion; jamais je n'ai vu d'effondrement partiel succéder à la liquéfaction.

Et cependant l'examen des dômes éruptifs conduit fréquemment à admettre l'existence de noyaux de lave. Une autre hypothèse ne peut guère être faite pour beaucoup de dômes basaltiques. Les dômes de cette nature près Linz sur le Rhin, par exemple le Schwarzenberg, le Meerberg, le Hummelsberg, sont beaucoup trop escarpés pour qu'on puisse en faire le produit d'éruptions massives de laves visqueuses. Une explication tirée de l'amoncèlement de courants de lave est rendue chimérique par le fait que des fissures nombreuses, régulièrement réparties, traversent le dôme du haut en bas. C'est surtout au Hummelsberg que ce phénomène se présente avec un remarquable degré de perfection: là apparaissent comme trois étages de colonnes verticalement superposées. Il ne reste dès lors plus qu'à admettre que toute la masse basaltique s'est refroidie uniformément de la périphérie vers le centre. Il faut de plus poser, eu égard à l'orientation à peu près verticale des piliers, que le refroidissement a débuté

surtout au sommet de la montagne. Mais ceci nous conduit à supposer, autour des faces latérales, une enveloppe épaisse de corps mauvais conducteurs; c'est le manteau conique de débris des anciens volcans, dont le noyau a été mis à nu sous forme de dômes basaltiques.

II. Expériences sur des cônes massifs de substances pulvérulentes.

Si l'on fabrique un cône, en versant sur une table une substance pulvérulente à l'aide d'un entonnoir de papier qui touche presque le sommet du cône, celui ci peut atteindre, dans des circonstances favorables, une inclinaison de 50°, avant que la masse ne se fendille, et ne glisse le long des flancs. Ces phénomènes de glissement se produisent d'ordinaire d'un seul côté; fréquemment ils ne s'étendent pas au delà du voisinage immédiat du sommet.

Si l'on veut réaliser plus parfaitement ce phénomène, on y arrivera en saupoudrant uniformément, à l'aide d'un tamis conique ou cupuliforme, le cône formé de la manière indiquée plus haut. Il se produit alors des fentes plus longues, distribuées d'une manière rayonnante autour du sommet (fig. 1). Elles sont plus larges et plus profondes dans le voisinage du sommet que dans la partie inférieure du cône, dont le pied n'est affecté que par quelques-unes d'entre elles. L'apparition des déchirures radiales est accompagnée de la formation de fentes circulaires moins apparentes, et d'un affaissement du cône.

De la fine chamotte (1 mm. et au dessous), permet d'observer le phénomène d'une manière particulièrement évidente; elle peut-être entassée jusqu'à former un angle de 49°, et s'affaisse, quand les fentes se montrent, jusque 43°. Vient ensuite le sable marin, avec un maximum d'inclinaison de 46°, affaissement jusque 41°. La poudre de trass du com-

merce donne un crevassement moins régulier; l'inclinaison maximum est de 49°; celle après affaissement 42½°. La pierre ponce en poudre donne à cause de sa legéreté et de sa rugosité, des cônes beaucoup plus pointus, opposant en même temps une résistance beaucoup plus grande aux déplacements le long des pentes. Ceux-ci se produisent-ils enfin (sous un angle de 57½°), d'ordinaire ils prennent aussi une plus grande extension. Des fissures, qui traversent le cône tout entier, et des poches profondes se rencontrent fréquemment. Tout aussi souvent des pics aigus restent debouts (fig. 2), et peuvent résister à des ébranlements même puissants. L'affaissement atteint 42½°.

De faibles secousses, des chocs légers contre la face inférieure de la table, provoquent le plus facilement l'apparition des fissures et leur donnent leur entier développement. Que l'on rende la surface fissurée de nouveau unie par la superposition d'une couche fraîche, et de nouveaux ébranlements pourront produire des fentes nouvelles. Elles seront d'ordinaire plus nombreuses, plus étroites, en même temps que plus profondes et plus étendues. L'affaissement du cône est moins prononcé que lors du crevassement initial, mais en revanche la forme du sommet se trouve ici singulièrement modifiée. Le crevassement répété du cône le transforme en un dôme à sommet arrondi (fig. 3).

La production de fentes se trouve en rapport intime avec l'affaissement du cône. La diminution de la pente indique une descente du manteau, un passage, par conséquent, de cercles plus petits à d'autres plus grands, ce qui ne peut se faire sans crevassement radial. Le mouvement doit se ralentir à mesure que l'on se rapproche de la base du cône, qui vient enrayer ce mouvement. Ceci a pour effet, en premier lieu, une profondeur et une largeur plus considérables des fissures radiales dans le voisinage du sommet; et en second lieu, l'apparition de plis annulaires, donnant naissance à ces fentes circulaires délicates qui vont constituer un réseau avec les

crevasses radiales. Il faut en outre considérer les affaissements verticaux. Ici aussi l'on a affaire à un mouvement enrayé, et ceci se produit de deux manières différentes. Tout d'abord, par ce que les masses meubles près du sommet, s'affaissant profondément, viennent buter contre les couches plus solidement tassées de la partie inférieure du cône. De là apparition d'une composante latérale, et transformation du mouvement d'affaissement en mouvement de glissement. C'est en second lieu un arrêt à la rencontre du substratum résistant du cône. L'addition des moments mécaniques qui en est la conséquence doit se faire valoir d'autant plus que le cône est formé de particules plus cohérentes, et se meut davantage comme un seul tout. De là résulte que les tassements et les glissements, localisés à l'origine au voisinage du sommet, peuvent s'étendre, dans une période plus avancée, jusqu'au pied même du cône. Comme de plus, à cause de l'adhésion au substratum, l'extension de la surface de base est rendue difficile, les tassements et les descentes doivent faire que la pente s'accuse à mi-hauteur tandis que, après comme avant, les masses nouvellement ajoutées au sommet s'affaissent. Ces deux ordres de phénomènes réunis font passer la forme conique de l'édifice à celle d'un dôme arrondi.

Il est moins facile d'entasser des cônes creusés d'une cavité en entonnoir que des cônes massifs. Après quelques essais on y parviendra cependant d'une manière satisfaisante. Ils montrent les mêmes phénomènes de fissuration et de tassement que les cônes massifs; il se produit par contre, en suite de descentes vers le centre de l'entonnoir, souvent des éboulements partiels du bord de celui-ci. Les dimensions de l'entonnoir décident avant tout, si l'édifice conique deviendra, par des effondrements répétés et par affaissement général, une ruine informe. L'entonnoir est-il petit, il sera possible d'arriver, par l'addition souvent répétée de nouvelles couches pulvérulentes, et par de fréquents ébranlements, à un état final qui ne se distingue d'un dôme massif arrondi que par une dépression insignifiante de son sommet.

Il suffira sans doute de signaler en passant, que les expériences précédemment décrites permettent de reconnaître le tassement et le déplacement le long des pentes comme les causes de la formation des crevasses radiales, si fréquentes dans les cônes volcaniques (barrancos aux Iles Canaries, quebradas et huaicos dans les Andes, djourangs à Java). Ils produisent de même ces accidents moins répandus: de profondes entailles et des excavations conchoïdales. Je ferai aussi tout brièvement remarquer que l'importance de l'érosion pour l'extension des crevasses en profondeur et en largeur ne subit par ces faits aucune atteinte; et que les considérations de Junghuhn sur la relation entre la forme du sommet d'un volcan et de l'histoire de celui-ci [1]) conservent essentiellement leur valeur.

III. Expériences sur des cônes formés par dégagement de gaz.

Les cuves de fermentation offrent quelquefois une occasion favorable de faire des observations de ce genre. On peut provoquer à volonté les mêmes phénomènes dans un melange d'argile fluide et de bicarbonate de soude, épaissi par l'addition de son ou de sciure de bois. Si l'on chauffe ce mélange dans une grande capsule plate, à l'aide d'une flamme aigue, il surgit un cône qui laisse s'épancher une bouillie de son sommet, d'une façon continue tout d'abord; plus tard, quand l'ébullition commence, par saccades. Ce qui donne à ces observations un intérêt tout particulier, c'est l'apparition, autour du pied du cône, d'une dépression circulaire, entourée elle même, à une distance plus considérable, d'un repli annulaire peu saillant. C'est bien sans doute à l'augmentation de densité, due au dégagement, à la surface libre du cône, de l'acide carbonique mis en liberté, qu'il faut attribuer en tout premier lieu

---

[1]) Java, Vol. 2. Description du Sumbing.

cette structure caractéristique. La dépression devrait augmenter à mesure que le cône s'accroît, et celui-ci finalement disparaître, si la naissance du repli annulaire ne venait rétablir l'équilibre. C'est le même phénomène qu'on observe quelquefois sur le versant escarpé, regardant du côté des terres, des hautes digues maritimes: une saillie du sol, uni d'ailleurs, suit parallèlement, à quelque distance, le pied de la digue. J'ignore si des saillies de même nature ont été observées aussi dans le voisinage des cônes volcaniques; il est probable qu'elles se rencontrent ici plus rarement que les dépressions. C'est à ces dernières qu'il faut rapporter sans doute la chute des couches vers la masse des roches éruptives, observée par Vogelsang entre autres au dôme phonolitique d'Olbrück. — Si l'on poursuit plus loin l'expérience citée plus haut, la propagation latérale de la chaleur ne tarde pas, après l'apparition de la saillie annulaire, à provoquer des éruptions sur les flancs du cône, dont la partie centrale rentre au repos.

IV. Production d'entonnoirs par insufflation dans des masses meubles planes.

Comme matière la plus propre à des expériences de ce genre il faut citer la poudre de chamotte, en second lieu le sable fin. On peut employer aussi du trass moulu et de la pierre ponce en poudre, qui montrent bien des phénomènes caractéristiques et dignes d'attention. L'emploi de la poudre de pierre ponce réclame de la prudence. Cette poussière pénétrante, répandue en quantité dans l'atmosphère, s'attache obstinément à tous les objets, et peut provoquer, dans le nez et à la peau de la face, des inflammations rebelles. Il n'y a moyen d'imiter qu'en grand le travail du soufflet à sable. On obtient par cette méthode de bons modèles; malheureusement on ne peut guère apporter de changements aux conditions de l'expérience; et l'on est de plus obligé, à cause de la pro-

duction abondante de poussière, de travailler à l'air libre; ce qui ne permet d'utiliser que des journées de calme atmosphérique absolu. La plupart des expériences ont été faites à l'aide d'une caisse légère de 40 cm. de profondeur, traversée en son fond par un tuyau à vent. L'embouchure de celui-ci ne doit pas être trop large (d'ordinaire 0,7 mm. et moins); il faut qu'en conséquence la pression soit assez élevée. Un soufflet de table d'émailleur ne suffit pas à toutes les expériences; un soufflet de Fletcher au contraire donne une pression suffisante, et peut être parfaitement employé, à condition que l'on interpose un robinet à frottement doux sur le trajet du porte-vent. De larges embouchures éparpillent trop la poudre, et soulèvent des nuages de poussière à une grande hauteur. Ces expériences donnent rapidement la conviction que la hauteur des colonnes de poussière ne dépend pas uniquement de la tension, mais encore d'une manière très marquée de la section du courant gazeux. Le tuyau à vent peut être déplacé verticalement dans un long bouchon de liége; à son extrémité terminale peuvent s'adapter, comme ajutages, de courts tubes de plomb.

1. Si l'ajutage est placé à une petite distance de la surface, il se creuse en peu de temps un entonnoir relativement large et peu profond, sans que les matières rejetées s'accumulent sensiblement sur le bord. Ces matières se répandent en gerbe jusqu'à une hauteur considérable. Si l'on abaisse peu à peu le tuyau à vent avec son ajutage, l'expulsion de poudre commence de nouveau; en même temps le canal de rejet devient plus étroit, presque cylindrique en profondeur, et tout autour de lui s'amoncèle un cône de débris rejetés. Ce cône s'effrite continuellement à l'embouchure du canal de rejet, qui s'élargit par là en forme d'entonnoir, en même temps que cette embouchure se sillonne de stries verticales. (fig. 4). L'un et l'autre effet résultent d'éraflures continuelles de la part des grains un peu plus volumineux. La section de l'entonnoir n'est pas toujours circulaire; son

bord n'atteint pas non plus partout la même hauteur. Des déviations légères vers le canal de rejet, des fentes délicates dans la couche de sable ou de chamotte déplacée ont ici une grande influence. La largeur de l'entonnoir est surtout déterminée par la pression du vent; à mesure que cette largeur s'accroît, la hauteur du cône de rejet devient moins considérable.

2. Si le même procédé est appliqué à une matière plus grossière, par exemple au trass moulu du commerce, le rejet commence de la manière déjà décrite. Plus tard s'accumulent dans le canal des grains plus grossiers, dont quelques-uns, la pression du vent devenant plus forte, sont rejetés par saccades, et provoquent de temps en temps l'effritement du bord de l'entonnoir. Quand la pression est plus faible, ils forment, au fond du canal, une surface plane, d'où s'élève un fin nuage filiforme de poussière, restant longtemps sans subir de modification.

3. La manière dont se comportent des couches épaisses, solidement agencées, se laisse étudier le mieux sur de la pierre ponce en poudre. Elle donne des canaux de rejet très étroits, presque cylindriques, avec des amoncèlements périphériques peu prononcés. En couche épaisse, rendue plane et superficillement tassée à l'aide d'un morceau de carton uni, les choses se passent tout différemment. Une pression faible du vent ne produit ici plus d'effet; une pression plus considérable soulève le centre, et fait apparaître des fentes radiales et circulaires. Au point de croisement de plusieurs crevasses se produit alors d'ordinaire un rejet excentrique de poudre, dans une direction oblique. Souvent 3—4 petites bouches de rejet, placées l'une près de l'autre en série, se relaient mutuellement. Plus d'une fois, l'éruption passe brusquement au côté opposé; une bouche s'ouvre à une distance considérable, et reste pour quelque temps maîtresse absolue du terrain (fig. 5 a et b: $e_1 - e_5$, cinq bouches de rejet successives).

Pendant ce temps, le centre du cône s'est insensiblement

vidé; il s'est formé ici, en profondeur, une cavité qui se rapproche peu à peu de la surface, et diminue la résistance en cet endroit. Ceci se trahit en premier lieu par ce que les crevasses au centre du champ de rejet s'élargissent, tandis qu'elles étaient resté longtemps inaltérées pendant l'activité des bouches excentriques. En second lieu, par ce qu'il se produit un soulèvement manifeste, suivi aussitôt d'une rupture de la portion centrale et d'un rejet violent de matières, accompagnés maintes fois d'un effondrement partiel (fig. 5—6). Puis la violence du rejet diminue bientôt; en relativement peu de temps le stade de l'émission calme de vapeurs se trouve atteint. Il n'y a pas à nier que le processus que je viens de décrire ne rappelle en beaucoup de points l'éruption du Krakataua, mieux encore la genèse du Jorullo, la théorie des cratères de soulèvement ayant ici, par hasard, une fois raison. Si l'on interrompt l'action du soufflet au commencement de la violente éruption centrale, il y a moyen de voir la large cavité intérieure et, avec quelque précaution, d'en pratiquer une coupe (fig. 6, e_1 et e_2, deux bouches de rejet conjuguées). Il est dès lors évident que le creusement d'une excavation, démontré par von Hochstetter dans les cônes volcaniques, peut tout aussi bien se produire par l'action d'un courant gazeux que par fusion. On serait presque en droit de soupçonner que la première éventualité est le plus fréquemment réalisée, et que plus d'une grande chaudière cratériforme, limitée par un rebord à pic, interprétée comme le reste d'un grand cône effondré, doit être mise sur le compte de l'évidation par un courant de gaz.

4. L'emploi d'une pression élevée permet aussi d'enlever la chamotte et le sable à de plus grandes profondeurs. Ces masses sont alors le siége de mouvements ondulatoires, comme un liquide en vive ébullition. La chamotte donne de larges entonnoirs, dont le bord tranchant se fendille circulairement et s'écaille. Le talus intérieur tend à former des terrasses. Le sable forme des entonnoirs encore plus larges, et ne donne

presque pas d'amoncèlement sur les côtés. L'une et l'autre substance produit, en couche épaisse, des entonnoirs à fond plat par l'insufflation. Si on reprend celle-ci sous une pression faible, on obtient quelquefois un étroit entonnoir secondaire; mais généralement ce sont quelques étroits évents, creusés dans le sol plat. Ce fond peut, quand on laisse de nouveau arriver le courant d'air, se mouvoir *comme un tout*, comme soulevé par un liquide visqueux. La pression faiblit-elle, il s'abaisse lentement, et de nouveau comme un seul tout [1]).

5. Pour apprendre à connaître la manière dont se comporte une poudre fine, je me suis servi de trass passé au tamis. Employé en couche épaisse, il se soulève; quelques déchirures apparaissent; et d'étroits canaux se creusent, qui sous une forte pression donnent longtemps de la poussière, sans s'élargir considérablement, ni accumuler de la poudre sur leurs bords. L'addition de sable marin modifie cette manière de se comporter, mais il faut employer beaucoup de sable pour la faire ressembler à celle de la chamotte, et la masse devient alors trop lourde. Ce défaut peut être corrigé par l'addition de poudre de pierre ponce. Un mélange de 4 vol. de sable marin, 1 vol. de poussière de trass et 1 vol. de pierre ponce en poudre se trouva être trop meuble, si on se contente de le verser sur la table. Légèrement comprimé, et en couche épaisse, il montra à l'insufflation toutes les phases de la formation d'un entonnoir: 1) des fentes radiales et circulaires; 2) le soulèvement du centre; 3) des bouches excentriques; 4) l'apparition d'un entonnoir central; 5) des déplacements répétés, la formation de terrasses et le développement d'un fond plat; 6) la paroi de l'entonnoir minée par en dessous; 7) l'effondrement commençant; ces deux derniers phénomènes

---

[1]) Voir la description du cratère du Bromo, dans le bassin cratériforme du Tengger, par Junghuhn, Java, vol. 3, où ce mouvement est décrit plus en détail, et interprété comme un soulèvement par le flot montant de lave.

se répétant à plusieurs reprises. La manière dont les choses se passent est due en partie à la légèreté et la cohérence considérables de la poussière de trass. Celle-ci rend la paroi de l'entonnoir unie, et s'oppose à ce qu'elle s'écaille. D'autre part, les grains plus grossiers de sable ou de pierre ponce agissent comme des projectiles; avec le plus d'énergie près de l'ajutage.

6. Si l'on comble un entonnoir jusque mi-hauteur, il en résulte un amoncèlement considérable sur le bord; la tendance à l'effondrement est peu prononcée. Si l'entonnoir est comblé dans *toute* sa hauteur, la masse de remplissage s'arrondit, le rebord dévie vers l'extérieur et s'accidente de *fentes radiales.* Le comblement répété de l'entonnoir entraîne des déplacements, qui peuvent devenir considérables.

7. L'ajutage employé dans les séries d'expériences 1—4 avait 0,5 mm.; celui des séries 5 et 6, 0,75 mm. de diamètre. Une embouchure de 1 mm. de diamètre fut maintenant adaptée au porte-vent de telle sorte que, la pression restant la même, la quantité d'air s'accrût dans le rapport 4 : 9 : 16. Avec une ouverture de cette dimension le mélange employé en 5 et 6 se comporte d'une manière différente. Un entonnoir est creusé avec une grande rapidité; il se continue en profondeur avec un canal presque cylindrique. A ce stade succède le rejet, par saccades, de matériaux plus grossiers. Enfin la cheminée du cratère se vide, tandis qu'une haute colonne de poussière en est rejetée. Le comblement de la partie évidée provoque une rapide augmentation de hauteur du cône pulvérulent et un élargissement de l'entonnoir, mais sans produire d'ailleurs d'autre modification. Pas de fond plat; pas de cavité centrale; pas d'effondrement. Il est manifeste que ces phénomènes sont en rapport entre eux, et avec la pression et la quantité d'air. La stabilité de l'entonnoir semble dépendre de la juste proportion entre la grosseur du grain et la force du vent. Cette proportion doit être si bien calculée, que la matière ne puisse retomber en quantité bien considérable.

8. Quand on ajoute au mélange de la pierre ponce en poudre grossière, on obtient en effet ce résultat, que même un ajutage de 1,5 mm. provoque des phénomènes de même nature que ceux décrits en 3 et 5. L'influence de l'addition d'esquilles plates de gypse ou de pierre ponce est encore plus décisive. Ce qui frappe, c'est la largeur et le peu de profondeur du bassin qui se creuse dans ces conditions. Souvent sa largeur excédait 12—15 fois sa profondeur, et son diamètre 120—150 fois celui de l'embouchure soufflante. Le fond est plat, les parois presque à pic, la hauteur de la masse de rejet insignifiante. Tout ceci est en rapport intime avec le fait que le courant d'air se ramifie entre les esquilles et les fragments plus grossiers. Ceux-ci peuvent rester longtemps en repos, tandis que les matériaux fins sont poussés vers les couches supérieures et chassés en minces colonnes. Ceci se continue jusqu'à ce qu'en profondeur arrive un glissement ou un effondrement, livrant libre passage à l'air, et lui apportant des matières plus fines. Un violent enlèvement de substance se produit alors, qui peut emporter et rejeter aussi des morceaux plus volumineux, à condition qu'ils ne viennent par rencontrer le bord soit de champ, soit de côté, et provoquer ici de nouveaux éboulements. L'escarpement de la paroi de l'entonnoir doit lui aussi être attribué à la division du courant d'air; surtout à la perte de vitesse que cette division entraîne. Si l'on a pratiqué un entonnoir étroit à l'aide d'un large ajutage (série d'expériences 7), et que l'on continue maintenant à souffler par une embouchure plus petite on verra aussitôt le sable et la ponce rouler jusqu'en bas, pour être rejetés avec violence. C'est un travail semblable à celui d'un *injecteur* qui est accompli ici par la veine gazeuse, dont la vitesse d'écoulement s'accroît. Elle emporte une plus grande masse d'air, et aspire en conséquence de l'air le long des parois de l'entonnoir.

Il semble tout donné de songer ici aux chaudières volcaniques de largeur considérable, qui ont rejeté surtout des

roches sédimentaires effritées (les „Dauner Maare"), ou de la poussière et de petits fragments ponceux (Lac de Laach). Je puis renvoyer pour cette matière à un article paru en 1888: Considérations sur l'origine des cratères-lacs de l'Eifel. Ann. de l'Ecole polytechnique de Delft, IV, 139.

Il reste encore à ajouter à la fin de ce paragraphe que tous les modes de formation de cônes et d'entonnoirs qui viennent d'être décrits subissent de profonds changements quand on mouille les matériaux rejetés. Si l'on projette à de courts intervalles, à l'aide d'un vaporisateur, une fine buée sur le cône de rejet, sa hauteur et son inclinaison s'accusent d'une manière surprenante. En même temps l'entonnoir se rétrécit, surtout en profondeur; il peut même subir à ce niveau une oblitération complète (fig. 7).

V. Injection de bouillies dans des cônes pulvérulents.

Après avoir obtenu, par insufflation, des cavités à étroite ouverture (voir plus haut en 3), il était naturel de fabriquer, par l'injection de plâtre, des noyaux massifs ayant la forme de ces cavités. L'introduction du plâtre liquide par l'orifice d'insufflation donna quelques modèles convenables, mais la plupart des expériences ne réussirent pas, par suite de l'apparition de fentes, par des déplacements, ou par suite de l'écoulement latéral de la masse d'injection. La résistance des cônes était manifestement trop diminuée par l'évidation, et d'une manière trop inégale. Il y avait lieu d'essayer si la production de noyaux réussirait mieux sans formation préalable de cavité par insufflation. A cet effet, des tubes de 3 mm. d'ouverture furent adaptés au centre d'une petite table de manière à dépasser sa surface d'environ 1 mm. Après qu'ils eurent été recouverts d'un morceau de papier huilé mince, un cône massif de sable fut versé par dessus.

Dans la plupart des expériences, le sable fut mélangé de $\frac{1}{5}$ de son volume de plâtre en poudre pour que la masse, bien mouillée, permît le jour suivant d'en faire des coupes. Quelquefois aussi des fragments plus grossiers y furent ajoutés, ainsi que des esquilles de plâtre durci. Le plâtre servant à la fabrication des noyaux fut coloré par l'oxyde de fer; la consistance trop liquide et la durée de solidification furent corrigées par l'addition de gélatine. L'injection de cette masse dans les tas de sable réclame une pression très énergique, beaucoup plus forte qu'un soufflet ne permet d'obtenir. L'emploi d'une balle de caoutchouc, réunie par un court tube de même matière à la canule d'injection, et remplie de la masse à injecter, fut reconnu simple et pratique. On peut modifier la pression suivant les besoins, et il ne faut que peu de temps pour terminer une expérience.

Dans la règle, la masse injectée commence par s'étaler parallèlement à la base du cône. Cet étalement est d'autant plus prononcé que la matière pulvérulente est plus lourde et plus solidement assise; que la masse d'injection, de son côté, est plus liquide. Dans une matière légère, meuble, fortement absorbante, une injection très fluide produit au second stade un nodule hémisphérique; au troisième, par gonflement dans le sens de moindre durcissement et de plus faible résistance, un coin à extrémité arrondie (fig. 8). Finalement la masse s'écoule par une ouverture relativement petite au sommet du cône. Si en ce moment on cesse de comprimer la balle, il se forme par affaissement un entonnoir plat, dont le canal ne tarde pas à s'obstruer. Une compression nouvelle plus forte amène la production de fentes et d'éboulements latéraux. Si les masses d'injection sont moins liquides, et si les cônes peuvent s'affaisser sous l'action de chocs, il apparaît des *noyaux pyriformes* (fig. 9), dont l'extrémité effilée regarde le sommet du cône. Il importe ici que la juste proportion entre les conditions d'expérience citées plus haut soit réalisée. Des masses d'injection épaisses et des cônes lourds et solidement

bâtis donnent des crevasses, des déplacements, et des noyaux irrégulièrement formés. La manière dont se comportent des cônes de matériaux mêlés envers l'injection de masses modérément liquides, à solidification lente, est d'un intérêt particulier. Chaque fragment quelque peu volumineux devient ici un obstacle, et oblige la bouillie qui s'avance à se détourner de sa route, surtout s'il augmente la cohésion des grains environnants par sa forme irrégulière et sa rugosité. On obtient en effet presque toujours, dans des cônes de cette nature, des noyaux irrégulièrement formés et sans direction définie (fig. 10). La masse d'injection se fait jour tantôt en un point, tantôt en un autre, rarement d'abord au sommet; et souvent des bouches d'épanchement multiples apparaissent successivement (fig. 11). Neuf ouvertures d'écoulement purent être obtenues, pour un seul noyau, par des augmentations et des diminutions répétées de la pression. On n'observe rien qui ressemble à des fentes dans l'intérieur du cône; il faudrait, pour obtenir de tels phénomènes, mettre en œuvre des poudres moins meubles, et en conséquence une pression plus forte.

VI. Injection de bouillies dans des masses pulvérulentes à surface horizontale.

Il restait encore à examiner la pénétration de bouillies dans des matières pulvérulentes disposées horizontalement. Je considérai ici deux cas: l'injection dans un entassement homogène, et celle dans des matériaux stratifiés. Cette stratification fut obtenue par des compressions et des chocs répétés, pendant qu'on versait la matière lentement et aussi uniformément que possible. Comme on pouvait attendre, par analogie avec les laccolithes, un étalement sphéroidal de la bouillie, s'étendant aussi vers le bas, je disposai l'ouverture de la canule d'injection à 10 cm. au dessus de la table. Le sable fut versé dans un cadre léger de 30 cm. de hauteur.

La première expérience, avec une couche de sable de 17 cm. versée de manière à rester bien meuble, conduisit à un résultat tout à fait inattendu. Au lieu d'un sphéroide, ce fut un corps cylindrique que j'obtins, de 5 cm. de hauteur et 3 cm. d'épaisseur, déprimé en forme de coupe à sa partie supérieure (fig. 12). Dans cette dépression, et de même à la surface externe du cylindre, s'observaient des rides transversales. L'extension de la masse injectée avait été très minime vers le bas; elle paraissait avoir été tout d'abord latérale, et plus tard, quand la résistance sur les flancs eût dépassé celle dans le sens vertical, dirigée surtout vers le haut. Poussant alors devant elle un cylindre de sable, elle l'avait fait s'étaler à la surface, sous la forme d'un dôme surbaissé. Une diminution de pression eut pour effet un affaissement de ce dôme; phénomène, qui aussi bien que la dépression en forme de coupe, produite probablement par la même occasion dans le noyau de plâtre, peut avoir été causé par la soustraction d'eau et l'affaissement de la masse de sable soulevée. La présence de sillons indique que le dernier facteur surtout a activement agi. Ces sillons font, à la surface externe, l'effet de plis de tassement; dans la coupe ils décrivent une ligne spiralée, et révèlent à la fois l'existence de tassements et de dilatations. Pour tirer ceci au clair, des expériences furent entreprises avec des couches de sable stratifié, déposées sur des matériaux meubles, et saupoudrées à leur tour de sable meuble.

La pénétration dans le sens horizontal et vers le bas fut, avec une disposition pareille, plus importante du double. Il en résulta des formes semblables à des champignons (fig. 13), montrant des sillons transversaux très accusés, et des replis radiaux, indices d'une fissuration du sable. La face supérieure du champignon était régulièrement déprimée, quelquefois plissée en spirale. La présence sur les côtes saillantes de prolongements ascendants en forme de cône de pin (fig. 14) fit soupçonner une pénétration plus profonde de la masse

au point d'entrecroisement des fissures radiales et de la solution de continuité, qui avait dû limiter la masse de sable soulevée. Il semblait, à cet endroit, que la forme concave des noyaux à leur face supérieure avait été amorcée durant l'ascension des masses injectées. Mais la contraction de la masse de plâtre, provoquée par l'absorption d'eau de la part du sable, pouvait toujours avoir contribué à la formation de la concavité. Pour acquérir à cet égard pleine certitude, je répétai la dernière expérience avec un mélange en fusion de cire et de résine, épaissi par de la fécule. Il faut ici remplacer les tubes de plomb ou de verre par du caoutchouc, à moins qu'on ne puisse les chauffer; sinon la masse se fige trop vite. J'obtins de nouveau un noyau fungiforme, muni de la même manière que les précédents d'une concavité à sa face supérieure. La masse résineuse paraît plus accuser les détails que le plâtre; c'est ce qu'on peut reconnaître particulièrement aux traces d'apophyses, qui sont bien mieux marquées (fig. 15).

La forme des noyaux, produits par injection intermittente, dépend avant tout de la longueur des intervalles. Les masses de la première injection se sont-elles déjà durcies à tel point que la deuxième ne peut plus y pénétrer, il faut que celle-ci se cherche un chemin latéralement; et ainsi naissent des formes irrégulières, semblables à celles déjà décrites à propos des cônes de poudre. La masse injectée en premier lieu renferme-t-elle au contraire en son centre une portion encore visqueuse, la masse injectée plus tard pénétrera dans ce résidu visqueux, *sans toutefois en emporter grand chose* (fig. 17). La première injection, à moitié solidifiée, se comporte comme un prolongement extensible de la canule; et il en résulte que la deuxième cheville est moins déprimée que la première, la couche de sable encore à soulever étant moins forte. Tout ceci peut être poursuivi sur des coupes de noyaux composés, préparés à l'aide de diverses masses colorées. S'il arrive que la dernière injection ait pénétré jusqu'à la surface du tas de poudre,

l'inclinaison de cet édifice en forme de pain de sucre ou de navet peut atteindre 70°. Généralement sa surface extérieure montre autant de rétrécissements ou d'étranglements qu'on a fait d'injections (fig. 16b) quelquefois des dépressions y ont en outre fait apparaître des replis. Des noyaux ellipsoidaux n'ont pu être obtenus jusqu'ici. On doit les considérer comme un terme spécial de cette longue série, marquée à l'une de ses extrémités par les cylindres déprimés, à l'autre par les cônes fortement effilés qui viennent d'être décrits. Il est probable que pour obtenir des noyaux sphéroïdaux et ellipsoïdaux il faudra pratiquer une injection lente sous une masse pulvérulente très épaisse. On devra, il est vrai, renoncer à l'emploi du plâtre.

Le résultat que l'on obtient par des injections réitérées dans des poudres stratifiées est exceptionnel. Ici aussi la deuxième injection peut pénétrer dans le noyau fungiforme formé en premier lieu, mais il n'arrive presque jamais qu'elle se fasse jour à travers le chapeau concave; elle se cherche une issue près de son bord relevé, et pousse en cet endroit une ou plusieurs saillies obliquement ascendantes. Je ne pus observer que de faibles indices d'apophyses horizontales; il faudrait, pour examiner celles-ci plus en détail, se servir de tas de poudre plus épais, et comprenant plus d'une couche consolidée par compression. Il est vrai qu'il faudrait alors mettre en œuvre un pression plus forte que celles dont je pouvais disposer (si c'était possible la pression de colonnes de mercure).

La première injection est elle faite dans une matière meuble, surmontée d'une couche plus cohérente, et recouverte elle même de matière meuble, tout d'abord, comme il a été démontré plus haut, la masse d'injection s'étale latéralement et vers le bas, sous la couche résistante. Plus tard, un fragment à peu près circulaire est arraché de cette couche et soulevé avec une masse de sable reposant dessus, de la forme d'un cône tronqué et renversé. C'est ce qu'indique le soulèvement, large et faiblement bombé, à la surface du tas de sable.

La fissure conique ainsi produite provoque le relèvement du bord de la masse d'injection et, si l'injection est intermittente, la formation des saillies obliques ascendantes. La coupe d'un tel noyau représentée fig. 17 permet de suivre jusqu'au bord du champignon l'étalement périphérique, et dirigé en même temps obliquement vers le haut, de la deuxième injection plus foncée dans l'intérieur de la première.

On est tenté d'appliquer les résultats que je viens de rapporter aux édifices volcaniques et plutoniques. Je crois cependant que ceci serait prématuré, et doit être réservé à ceux qui disposent d'un plus grand fonds d'observations personnelles.

Il serait encore plus désirable que les expériences ici décrites fussent répétées et poursuivies par d'autres, avec des moyens d'investigation plus perfectionnés et sur une plus grande échelle.

Explication des Figures.

1. Cône massif de poudre de chamotte, fissuré par tassement, vu d'en haut.
2. Cône massif de poudre de pierre ponce, fissuré et éboulé par ébranlement. Vue latérale.
3. Cône massif de poudre de chamotte, après ébranlements répétés, et addition de couches nouvelles. Vue latérale du troisième système de fissures, et du sommet arrondi en dôme: d'après une photographie. Un éboulement commençant à gauche.

4—7. Entonnoirs d'insufflation.

4. Entonnoir cannelé dans un mélange de sable, de trass et de poudre de ponces, avec cône de rejet plat. Coupe verticale.
5. *a*, *b*, *c*. Creusement d'une cavité par insufflation dans de la ponce comprimée. 5*a*. Premier stade : soulèvement et expulsion par les bouches successivement actives e_1 à e_5. 5*b*. Deuxième stade : soulèvement en forme de bouclier, et élargissement des crevasses radiales. 5*c*. Effondrement central et formation d'un entonnoir.

6. Coupe verticale de 5*c*, montrant la cavité lagéniforme et deux canaux de rejet.
7. Cône escarpé, alternativement formé de couches incolores et colorées de sable et de plâtre, mouillé de temps en temps et insufflé.

8—11. Noyaux pierreux, produits par injection de plâtre dans des cônes de sable et de plâtre.

8. Coin vertical de plâtre dans un cône de sable et de plâtre.
9. Noyau pyriforme de même nature, partiellement creux, produit par injection intermittente.
10. Cheville claviforme à direction oblique, dans un mélange de sable, de plâtre et d'esquilles de plâtre.
11. Noyau ramifié, dans un mélange analogue. Injection intermittente.

12—17. Noyaux pierreux, obtenus sous une surface horizontale. D'après des photographies.

12. Cheville cupuliforme. Injection unique de plâtre dans du sable meuble.
13. Passage à la forme de champignon. Injection unique dans du sable stratifié.
14. Champignon à prolongements obliques. Injection deux fois répétée de masses liquides différemment colorées dans du sable stratifié.
15. Champignon de masse résineuse. Injection deux fois répétée de masses liquides différemment colorées dans du sable stratifié.

16 *a*, *b*. Noyaux composés de plâtre en forme de pain de sucre et de navet. Injection triple dans du sable meuble.

17. Coupe verticale de 15.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

MESURES RELATIVES AU PHÉNOMÈNE DE KERR,

DANS L'AIMANTATION PARALLÈLE À LA SURFACE RÉFLÉCHISSANTE

PAR

R. SISSINGH.

I. Introduction.

1. Dans les années 1877 et 1878, Kerr découvrit et décrivit, dans ses caractères essentiels, l'influence que le magnétisme exerce sur les propriétés de la lumière réfléchie par les surfaces polaire et latérale d'un aimant [1]). Le nouveau phénomène se résume de la manière la plus simple comme suit: Quand le rayon incident est polarisé dans un des plans principaux, c'est à dire dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, l'aimantation fait apparaître dans la lumière réfléchie une composante, dont le plan de polarisation est perpendiculaire à celui du rayon incident. Cette composante possède une amplitude et une phase déterminées, dépendant de l'angle d'incidence, de l'intensité du champ magnétique et des constantes optiques du miroir. La lumière réfléchie est en général polarisée elliptiquement. Pour analyser complètement le phénomène, il faut donc que l'on puisse donner, pour une incidence quelconque, l'amplitude et la

[1]) J. Kerr. On Rotation of the Plane of Polarisation by Reflection from the Pole of a Magnet. Phil. Mag. Ser. 5, vol. 3.

J. Kerr. On Reflection of Polarized Light from the Equator. Surface of a Magn. Phil. Mag. Ser. 5, vol. 5.

la phase, et de plus l'influence exercée par différents facteurs sur ces éléments.

Depuis Kerr, MM. Kaz [1]), Kundt [2]) et Righi [3]) étudièrent encore la réflexion par la surface latérale d'un aimant; ils confirmèrent et étendirent les résultats de leur prédécesseur.

Les recherches suivantes ont permis, entre autres par l'observation simultanée des constantes optiques du miroir, d'examiner l'influence de différents facteurs sur le phénomène. Elles ont justifié en outre un essai de ramener les formules, passablement compliquées, à des expressions plus simples, en faisant usage de la théorie de M. Lorentz [4]). La première partie de ce travail renferme la détermination de l'amplitude et de la phase de la composante magnéto-optique, pour divers angles d'incidence, dans la réflexion équatoriale; la deuxième partie, que j'espère pouvoir bientôt publier, fera connaître ces quantités dans la réflexion polaire, et donnera de plus le rapport existant entre les deux espèces de réflexion, la dispersion du phénomène, enfin la relation qui existe entre cette dispersion et celle de la réflexion par le métal.

Conformément aux conventions adoptées par tous les observateurs précédents, l'aimantation sera dite positive, quand les molécules tournent leur pôle nord vers le côté de la normale au miroir, où se trouve le polariseur.

---

[1]) P. C. Kaz. Over de terugkaatsing van het licht door magneten. Amsterdam, 1884.

[2]) A. Kundt. Die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel. Wied. Ann. Bd. 23.

[3]) A. Righi. Recherches expérimentales sur la lumière polarisée réfléchie par la surface équatoriale d'un aimant. Ann. de Chim. et de Phys. Sér. 6. vol. X.

[4]) H. A. Lorentz. De door Hall ontdekte werking van een magneet op een electrischen stroom en de electromagnetische draaiing van het polarisatievlak van het licht. Versl. en Meded. der Kon. Acad. Amsterdam. Reeks II. Deel 19. Voir aussi Arch. Néerl. T. XIX.

II. Méthode d'observation.

A. *Détermination des différentes quantités.*

2. Supposons que les nicols se trouvent dans les deux plans principaux, c'est à dire de telle sorte que les plans de polarisation soient placés dans le plan d'incidence et perpendiculairement à celui-ci. La lumière réfléchie est alors éteinte avant que le miroir ne soit aimanté, et l'on peut, après aimantation, soit réduire l'intensité de la lumière réfléchie à un minimum par rotation du polariseur ou de l'analyseur, soit la rendre nulle en faisant tourner les deux nicols à la fois. Les rotations de la première espèce s'appellent rotations au minimum, les autres rotations à zéro. Kerr a déjà employé les premières. M. van der Waals a montré par quelle voie ces rotations peuvent servir à déterminer la grandeur et la phase de la composante magnéto-optique. Les rotations sont données par φ^m_{ip}, φ^m_{ia} ; φ^m_{pp}, φ^m_{pa}; φ°_{ip} et φ°_{ia}; φ°_{pp} et φ°_{pa}. Dans ces expressions, les exposants m et 0 indiquent que les rotations sont respectivement au minimum et à zéro ; p et a expriment que l'on a fait tourner le polariseur ou l'analyseur ; i et p indiquent que la lumière incidente est polarisée, soit dans le plan d'incidence, soit perpendiculairement à celui-ci. Le sens des rotations sera déterminé hors de toute équivoque quand je me servirai des définitions déjà employées par moi antérieurement [1]). Les rotations sont dites positives, quand elles ont lieu dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, pour un observateur placé sur le rayon incident ou réfléchi, la figure tournée vers le miroir. On compte les rotations du polariseur à partir d'une position, où la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence ;

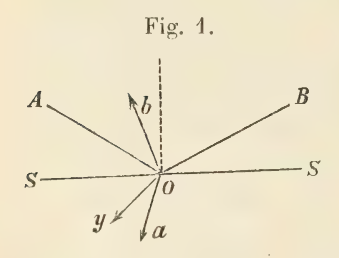
---

[1]) R. Sissingh. Metingen over de elliptische Polarisatie van het Licht. Leiden, 1885, p. 78. Voir aussi Arch. Néerl. T. XX.

celles de l'analyseur à partir d'une position, où ce rayon se trouve éteint après réflexion.

Si l'on veut déterminer les différences de phase entre des vibrations lumineuses, qui ne se propagent pas suivant des lignes parallèles, il s'agit tout d'abord de décider quelles directions seront considérées comme étant coordonnées. La différence de phase est nulle, quand les deux directions coordonnées présentent à la fois les perturbations d'équilibre les plus considérables. Or, le choix de ces directions, pour les faisceaux polarisés dans le plan d'incidence et perpendiculairement à ce plan, se fait de la manière suivante. Il est arbitraire pour le rayon incident polarisé dans le plan d'incidence. La direction du rayon incident polarisé perpendiculairement à ce plan en résulte d'elle-même ; il suffit pour cela d'une rotation de 90° dans le sens positif, vu du polariseur. La direction du rayon réfléchi, polarisé dans le plan d'incidence, coïncide avec la première. Une rotation de 90° dans le sens positif, vu de l'analyseur, permet d'obtenir enfin la direction du rayon réfléchi, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence [1]). Les différences de phase des faisceaux réfléchis sont toujours données comme un retard de phase relativement au rayon réfléchi, polarisé dans le plan d'incidence. Ce rayon est le rayon étalon, sa phase la phase étalon; et il résulte tant de l'observation que de la théorie, que le retard de phase Φ du faisceau réfléchi, polarisé

Fig. 1.



[1]) Les directions positives des plus grandes perturbations d'équilibre, telles que ces directions ont été choisies, sont représentées fig. 1 par *Oy*, *Oa* et *Ob*. Dans cette figure *SS* représente le miroir, *AO* le rayon incident, *OB* le rayon réfléchi; $Oa \perp AO$, $Ob \perp OB$ et *Oy* est mené vers le côté, d'où une rotation de *AO* vers *OB*, au delà de la normale, s'observe dans le sens positif. *Oa* et *Ob* se trouvent dans le plan d'incidence, *Oy* est perpendiculaire à ce plan.

perpendiculairement au plan d'incidence, croît de 0° à 180°, quand l'angle d'incidence augmente de 0° à 90°.

Si le faisceau incident est polarisé dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à celui-ci, le plan de polarisation de la composante magnéto-optique est perpendiculaire à ce plan. Les amplitudes de ces composantes sont représentées par μ_i, μ_p, quand l'amplitude du faisceau incident est égale à l'unité; les retards de phase des mêmes composantes, relativement au rayon étalon, sont représentés par m_i, m_p. Les indices i, p sont destinés à indiquer que le faisceau incident est polarisé, soit dans le plan d'incidence, soit perpendiculairement à ce plan.

B. *Rotations au minimum.*

3. La méthode des rotations au minimum et à zéro peut, conformément aux définitions ici employées, être développée de la manière suivante [1]).

Supposons d'abord que la lumière incidente soit polarisée dans le plan d'incidence; posons l'amplitude $= 1$.

Si l'on tourne le polariseur d'un angle φ_{ip}, le miroir reçoit
un rayon, polarisé || au plan d'incidence, amplitude 1,
" " " ⊥ " " " " φ_{ip}.

De la résultent, par réflexion

1° un rayon, polarisé || au plan d'incidence, amplitude f, phase étalon,

2° un rayon, polarisé ⊥ au plan d'incidence, amplitude $h\,\varphi_{ip}$, retard Φ,

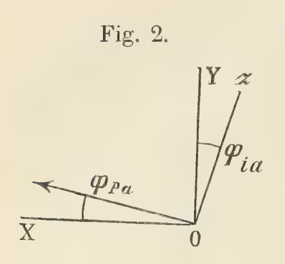
3° un rayon polarisé ⊥ au plan d'incidence, amplitude μ_i, retard m_i; c'est la composante magnéto-optique,

---

[1]) M. Kaz (l.c.) a déjà fait antérieurement la même chose pour les définitions dont il s'est servi. Lorsque M. Kaz a traité le même sujet, il en sera régulièrement fait mention.

Soit (fig. 2) un plan XOY, perpendiculaire au rayon réfléchi, et vu du côté où se trouve l'analyseur. Supposons que OX soit dans le plan d'incidence. Comptons positivement, suivant OX, les perturbations d'équilibre pour le rayon étalon, c'est-à-dire le premier faisceau réfléchi, polarisé parallèlement au plan d'incidence. Il faut alors, suivant § 2, que les perturbations présentées par le deuxième faisceau réfléchi et la composante magnéto-optique soient comptées positivement suivant la direction OY, qui résulte de OX par une rotation positive de l'analyseur.

Fig. 2.



Avant que le polariseur n'eût été tourné et le miroir aimanté, cet analyseur se trouvait dans la position d'extinction. Faisons à ce moment tourner l'analyseur d'un angle φ_{ai}; il laissera passer certaines parties des trois faisceaux lumineux nommés précédemment, savoir

un faisceau d'amplitude $-f\,\varphi_{ia}$, phase étalon,
un faisceau d'amplitude $h\,\varphi_{ip}$, retard Φ,
un faisceau d'amplitude μ_i, retard m_i.

Le déplacement présenté par le faisceau résultant est donc exprimé par

$$-f\,\varphi_{ia}\cos 2\pi\frac{t}{T}+h\,\varphi_{ip}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}-\Phi\right)+\mu_i\cos\left(2\pi\frac{t}{T}-m_i\right),$$

et l'intensité par

$$\left[-f\,\varphi_{ia}+h\,\varphi_{ip}\cos\Phi+\mu_i\cos m_i\right]^2+\left[h\,\varphi_{ip}\sin\Phi+\mu_i\sin m_i\right]^2 \ldots\ldots(1)$$

Supposons maintenant que la lumière incidente soit polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, l'amplitude étant 1. Faisons tourner le polariseur d'un angle φ_{pp}. Le miroir reçoit en ce cas deux faisceaux,

l'un polarisé $\perp$ au plan d'incidence, amplitude 1
l'autre » $\parallel$ » » » » $-\varphi_{pp}$ [1])

De là résultent par réflexion:

1° rayon, polarisé $\perp$ un plan d'incidence, amplitude h, retard Φ.

2° un rayon, polarisé $\parallel$ au plan d'incidence amplitude $-f\varphi_{pp}$, phase étalon.

3° un rayon polarisé $\parallel$ au plan d'incidence, amplitude $+\mu_p$, retard m_p; c'est la composante magnéto-optique.

L'analyseur occupait, avant que le polariseur n'eût été tourné et le miroir aimanté, la position d'extinction. Il se laisse traverser, après avoir été tourné d'un angle φ_{pa} (voir fig. 2)

par un faisceau d'amplitude $h\,\varphi_{pa}$, retard Φ
» » » » $-f\,\varphi_{pp}$, phase étalon,
» » » » $+\mu_p$, retard m_p.

Le déplacement, dans le faisceau résultant, s'exprime par

$$-f\varphi_{pp}\cos 2\pi\frac{t}{T}+\mu_p\cos\left(2\pi\frac{t}{T}-m_p\right)+h\varphi_{pa}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}-\Phi\right),$$

et l'intensité par

$$\left[-f\varphi_{pp}+\mu_p\cos m_p+h\varphi_{pa}\cos\Phi\right]^2+\left[\mu_p\sin m_p+h\varphi_{pa}\sin\Phi\right]\ldots(2)$$

J'ai négligé, en construisant les formules (1) et (2), des grandeurs d'ordre $(\varphi_{ip})^2$, $\mu\,\varphi_{ip}$, etc. Ceci se justifie pleinement par le fait que les rotations ne s'élèvent qu'à quelques minutes, et que μ reste encore inférieur à 0,001.

4. Les expressions (1) et (2) donnent d'emblée les valeurs des rotations au minimum. Si le polariseur fait avec le plan d'incidence un angle φ_{ip}, la rotation φ_{ia} de l'analyseur, qui

[1]) Suivant les conventions du § 2, la perturbation est positive chez un rayon polarisé $\perp$ au plan d'incidence, que l'on obtient en faisant tourner le polariseur dans le sens positif, d'un angle aigu, à partir d'un azimut de 0°. La perturbation dans le faisceau polarisé $\parallel$ au plan d'incidence, obtenu en faisant tourner le polariseur d'un angle aigu, à partir d'un azimut de 90°, doit donc être comptée négativement.

rend minima l'intensité de la lumière réfléchie, et qu'on représente en conséquence par φ_{ia}^{m}, est, d'après (1), donnée par l'équation

$$-f\varphi_{ia}^{m} + h\varphi_{ip}\cos\Phi + \mu_i \cos m_i = 0 \ldots\ldots (3)$$

L'analyseur fait-il avec un plan perpendiculaire au plan d'incidence un angle φ_{ia}, la rotation du polariseur qui rend minima l'intensité de la lumière réfléchie, donc la rotation φ_{ip}^{m}, se trouve, d'après (1), par l'équation

$$h\varphi_{ip}^{m} - f\varphi_{ia}\cos\Phi + \mu_i\cos(\Phi - m_i) = 0 \ldots\ldots (4)$$

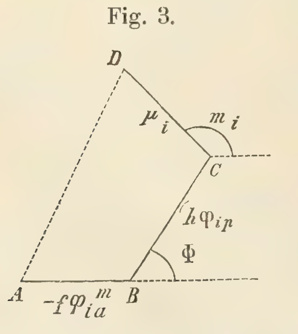
Les valeurs des rotations au minimum φ_{pp}^{m} et φ_{pa}^{m} découlent, de la même manière, de (2). Elles sont données par les équations

$$-f\varphi_{pp}^{m} + h\varphi_{pa}\cos\Phi + \mu_p\cos m_p = 0 \ldots\ldots (5)$$

$$h\varphi_{pa}^{m} - f\varphi_{pp}\cos\Phi + \mu_p\cos(\Phi - m_p) = 0 \ldots\ldots (6)$$

Les équations (3)—(6) peuvent également être obtenues en faisant la construction géométrique de la résultante des faisceaux qui traversent l'analyseur. L'angle formé par le polariseur avec le plan d'incidence étant par exemple φ_{ip}, et la lumière réfléchie atteignant son minimum d'intensité après une rotation φ_{ia}^{m} de l'analyseur, celui-ci laisse passer trois faisceaux lumineux, dont les amplitudes sont représentées par $-f\varphi_{ia}^{m}$, $h\varphi_{ip}$ et μ_i; les retards de phase par rapport au rayon étalon 0 par Φ et m_i. L'amplitude du faisceau résultant est AD (fig.3). Cette valeur est un minimum pour AB, quand $AD \perp AB$, car AB changeant de valeur, D se trouve toujours joint à un point de la droite AB par la ligne DA. L'équation (3) donne la condition nécessaire pour que $AD \perp AB$. C'est

Fig. 3.



d'une manière analogue qu'il faut mettre en lumière la signification des équations (4), (5) et (6) [1]).

5. Si l'on admet que, l'aimantation étant renversée, l'amplitude μ de la composante magnéto-optique change seule de signe, tandis que la phase m reste la même, il résulte des équations (3) à (6) que les positions au minimum du polariseur et de l'analyseur ne sont symétriques par rapport aux plans principaux, que dans le seul cas ou un des nicols se trouve dans un de ces plans. Ces plans principaux sont le plan d'incidence et un plan perpendiculaire à celui-ci. Dans cette position des nicols, les angles φ_{ip}, φ_{ia}, φ_{pp}, φ_{pa} doivent nécessairement être nuls [2]).

Si l'on représente par ψ_{ip}^{m}, ψ_{ia}^{m}, ψ_{pp}^{m}, ψ_{pa}^{m} [3]), les angles que font entre elles les orientations au minimum des nicols dans l'aimantation positive et négative, il résulte des équations (3) à (6), dans l'hypothèse énoncée antérieurement au sujet de la variation de μ et de m quand l'aimantation est renversée, que l'on a

$$tg\, m_i = -\cot g\, \Phi - \frac{1}{\sin \Phi} \frac{h\, \psi_{ip}^{m}}{f\, \psi_{ia}^{m}},\ \mu_i = + \frac{f\, \psi_{ia}^{m}}{2 \cos m_i}$$

$$tg\, m_p = -\cot g\, \Phi - \frac{1}{\sin \Phi} \frac{h\, \psi_{pa}^{m}}{f\, \psi_{pp}^{m}},\ \mu_p = + \frac{f\, \psi_{pp}^{m}}{2 \cos m_p} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Pour l'angle d'incidence principale $\Phi = \frac{\pi}{2}$, et d'après les équations (3) à (6), les rotations au minimum sont indépendantes des angles φ_{ip}, φ_{ia}, φ_{pp}, φ_{pa}; elles ont donc la même valeur, que les nicols occupent une des orientations principales, ou qu'ils fassent un angle de faible écartement avec celles-ci. La rai-

---

1) Voir Kaz l.c., p. 36 et 48.

2) Voir Kaz l.c., p. 39 et 52.

3) Ces angles ψ sont égaux au double des rotations au minimum, que l'on observe quand un des nicols se trouve dans le plan d'incidence ou est perpendiculaire à celui-ci.

son de cette indépendance nous est révélée par la construction géométrique de l'amplitude résultante des faisceaux passant par l'analyseur. En effet, si celui-ci fait un angle φ_{ip} avec le plan d'incidence, $A\,D$ représente, d'après la fig. 3, l'amplitude résultante. Comme la rotation de l'analyseur, nécessaire pour déterminer la position au minimum, entraîne une modification de la seule ligne $A\,B$, $A\,D$ est minima, quand $A\,D \perp A\,B$. Quand l'incidence est principale, et $\Phi = \frac{\pi}{2}$, cette quantité est indépendante de $B\,C = h\,\varphi_{ip}$ [1]).

6. L'intensité lumineuse du faisceau qui traverse l'analyseur après une rotation au minimum φ_{ia}^{m} est, d'après l'équation (1), représentée par $(h\,\varphi_{ip}\,sin\,\Phi + \mu_i\,sin\,m_i)^2$. Si l'on fait maintenant tourner l'analyseur, à partir de cette position, d'un angle ε, l'équation (1) montre encore que l'accroissement de l'intensité lumineuse s'exprime par $f^2\varepsilon^2$. Or ce petit accroissement s'observe le plus nettement quand l'intensité initiale, dans l'orientation au minimum, est le plus faible. Admettant donc que m ne change pas et que μ change seul de signe quand l'aimantation est renversée, il s'ensuit que les rotations au minimum ne s'observent pas avec une égale netteté, suivant que l'aimantation est positive ou négative. Ceci n'a lieu que dans le cas où les angles φ_{ip}, etc. sont nuls; c'est-à-dire quand un des nicols se trouve exactement dans un des plans principaux. La précision avec laquelle on peut déterminer les rotations au minimum est la plus petite, quand Φ se rapproche de 90°, c'est-à-dire dans le voisinage de l'incidence principale; elle est la plus grande quand les angles d'incidence sont de forte et de faible valeur.

---

[1]) Les équations (7) montrent que le signe de μ peut être choisi arbitrairement, et que ce choix seul détermine le quadrant de m. La même chose résulte des équations (3) — (6), car celles-ci déterminent seules les quantités $\mu_i\,sin\,m_i$, $\mu_i\,cos\,m_i$, etc.

C. *Rotations à zéro.*

7. Les équations (1) et (2) donnent aussi les valeurs des rotations à zéro. En effet, pour que l'intensité de la lumière passant par l'analyseur soit nulle, il faut que φ_{ip}, φ_{ia}, auxquels revient maintenant la signification de φ°_{ip}, φ°_{ia}, satisfassent, suivant (1), aux équations :

$$\begin{aligned} -f\,\varphi^{\circ}_{ia} + h\,\varphi^{\circ}_{ip} \cos \Phi + \mu_i \cos m_i &= 0 \\ h\,\varphi^{\circ}_{ip} \sin \Phi + \mu_i \sin m_i &= 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8), \end{aligned}$$

De même, (2) donne les équations qui déterminent φ°_{pp}, φ°_{pa}, savoir

$$\begin{aligned} -f\,\varphi^{\circ}_{pp} + \mu_p \cos m_p + h\,\varphi^{\circ}_{pa} \cos \Phi &= 0 \\ \mu_p \sin m_p + h\,\varphi^{\circ}_{pa} \sin \Phi &= 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9). \end{aligned}$$

De ceci résulte :

$$\left.\begin{aligned} cotg\ m_i &= -\frac{f\,\varphi^{\circ}_{ia}}{h\,\varphi^{\circ}_{ip}}\frac{1}{\sin \Phi} + cotg\ \Phi, \quad \mu_i = -\frac{h\,\varphi^{\circ}_{ip} \sin \Phi}{\sin m_i} \\ cotg\ m_p &= -\frac{f\,\varphi^{\circ}_{pp}}{h\,\varphi^{\circ}_{pa}}\frac{1}{\sin \Phi} + cotg\ \Phi, \quad \mu_p = -\frac{h\,\varphi^{\circ}_{pa} \sin \Phi}{\sin m_p} \end{aligned}\right\} \ldots \quad (10)$$

Les équations (9) et (10) peuvent à leur tour être déduites de la construction géométrique qui donne l'amplitude résultante des faisceaux passant par l'analyseur. C'est ainsi que d'après l'équation (8), la projection de cette amplitude résultante *A D* (voir § 4 fig. 4) est nulle dans deux directions perpendiculaires l'une à l'autre, et *A D* est donc elle-même nulle. La même signification revient aux équations (9) [1]).

Si l'on admet que, l'aimantation étant renversée, la phase m de la composante magnéto-optique ne change pas, et l'amplitude μ change seule de signe, les équations (8) et (9) permettent de conclure que les positions à zéro, dans l'aimantation positive et négative, sont symétriques relativement aux deux plans principaux ; c'est-à-dire le plan d'incidence et le plan perpendiculaire à celui-ci.

---

[1]) Voir Kaz l. c. p. 48–55 et p. 61.

Les angles que font entre elles ces positions, et que nous représenterons par ψ^0_{ip}, ψ^0_{ia}, ψ^0_{pp}, ψ^0_{pa}, sont donc plus grands du double que les angles φ^0_{ip}, φ^0_{ia}, φ^0_{pp}, φ^0_{pa} [1]). Si l'on détermine par l'observation, non plus les angles φ, mais les angles ψ, on tire μ et m des équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} cotg\ m_i &= -\frac{f\ \psi^0_{ia}}{h\ \psi^0_{ip}}\ \frac{1}{sin\ \Phi} + cotg\ \Phi,\ \mu_i = -\frac{h\ \psi^0_{ip}\ sin\ \Phi}{2\ sin\ m_i} \\ cotg\ m_p &= -\frac{f\ \psi^0_{pp}}{h\ \psi^0_{pa}}\ \frac{1}{sin\ \Phi} + cotg\ \Phi,\ \mu_p = -\frac{h\ \psi^0_{pa}\ sin\ \Phi}{2\ sin\ m_p} \end{aligned}\right\} \ldots (11)$$

8. Les rotations à zéro ne peuvent être déterminées d'une manière précise quand les angles d'incidence sont très grands ou très petits. Les orientations faites à l'aide des nicols donnent alors l'impression que plusieurs couples de positions à zéro sont possibles. Représentons deux de ces couples par φ^0_{ip}, φ^0_{ia}, φ'^0_{ip}, φ'^0_{ia}. Il résulte du § 8 qu'ils ne sont réellement possibles qu'à la seule condition qu'il soit satisfait aux équations

$$f\,(\varphi^0_{ia} - \varphi'^0_{ia}) = h\ cos\ \Phi\ (\varphi^0_{ip} - \varphi'^0_{ip}),\ h\ sin\ \Phi\ (\varphi^0_{ip} - \varphi'^0_{ip}) = 0.$$

Or, il n'y a pas moyen de satisfaire à ces équations d'une manière absolue; mais il en est à peu près ainsi pour des angles d'incidence ou très grands ou très petits, quand $sin\ \Phi$ a une très faible valeur, et que $cos\ \Phi$ et $\frac{f}{h}$ sont presque égaux à 1. On se trouvera alors avoir une série de valeurs croissantes de φ^0_{ip} et φ^0_{ia}, tandis que l'intensité du faisceau, passant par l'analyseur, sera à peu près nulle. C'est ce que les observations confirment et ce dont on peut se rendre compte de la manière suivante. Si l'on fait tourner le polariseur et l'analyseur, à partir des positions à zéro, d'angles η et ε, l'intensité du faisceau émergeant de l'analyseur sera donnée, d'après l'expression de l'intensité (équation (1) § 3), par

---

[1]) Les équations (8)—(11) montrent que le signe de μ peut être arbitrairement choisi, et que ce choix seul détermine le quadrant de m

$(f\varepsilon - h\eta)^2 + h^2\eta^2 \sin^2 \Phi$. Or, la détermination des orientations à zéro se fait de telle manière, que l'on cherche des positions au minimum coordonnées et qu'on choisit celles de ces positions, pour lesquelles le minimum d'intensité lumineuse est aussi petit que possible. Ce qui précède a d'ailleurs montré que, pour des incidences très petites ou très grandes, les différences ε et η entre des positions au minimum successives sont à peu près d'égale grandeur. Il en est résulte aussi que $\sin \Phi$ de son coté à une valeur très faible, de sorte que la variation d'intensité est petite. Il faut donc que l'exactitude de ces déterminations ne soit pas très considérable.

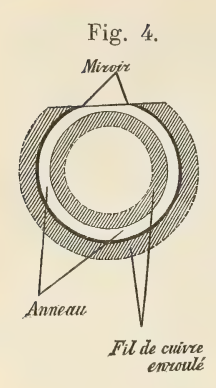
9. Les formules relatives aux rotations au minimum et à zéro se confondent quand l'incidence est principale. Le raisonnement suivant permet de se représenter qu'il en doit être ainsi. L'équation (3) § 4 donne la condition que l'intensité de la lumière réfléchie devienne minima par une rotation φ_{ia}^m de l'analyseur, quand la lumière incidente est polarisée à peu près dans le plan d'incidence. Quand l'incidence est principale, et $\Phi = 90°$, cette condition est indépendante de l'angle φ_{ip}, formé par la polariseur avec le plan d'incidence; de sorte que la valeur de φ_{ia}^m, déduite de cet angle, s'applique aussi à cette valeur de φ_{ip}, pour laquelle l'intensité lumineuse est nulle. φ_{ia}^m a donc la signification d'une rotation à zéro. Ceci montre qu'à l'incidence principale, φ_{ia}^m et φ_{ia}° sont égaux entre eux. La même chose s'applique aux autres rotations.

III. Description de l'appareil.

A. *Miroirs.*

10. Afin d'aimanter fortement le miroir sur lequel se fait la réflexion, une surface, de 3 c.M. de longueur sur 2,8 m.M. de largeur vers la partie moyenne, fut taillée du côté externe de deux anneaux de fer (épaisseur 6 m.M., diamètre

Fig. 4.



10 c.M.) (fig. 4). La réflexion avait lieu au centre de cette surface. Les anneaux furent enveloppés de 7 couches de fil de cuivre, enroulées en spirale; le fil avait 1,5 à 2 m.M., d'épaisseur. Dans le voisinage des miroirs, les tours de la spirale se terminaient en cône, de manière à ne pas dépasser le plan du miroir, et à permettre ainsi l'observation sous des incidences considérables. Le courant était fourni par 15 éléments Bunsen, 5 séries de trois placés l'un à côté de l'autre. Le courant d'aimantation était en général de 15 ampères. Il résultait de l'inspection du spectre magnétique qu'en dedans et en dehors de la bobine n'existaient que peu de lignes de force, et que, de même, peu de lignes de force sortaient de l'anneau, aux extrémités des miroirs. Ces lignes étaient, au centre du miroir, parallèles à son plan, avec lequel, à ses extrémités, ils ne faisaient que des angles très-petits L'intensité de l'aimantation fut déterminée en mesurant le courant d'induction dans une spirale d'épreuve enroulée autour du miroir, sa valeur absolue fut obtenue à l'aide de l'inducteur terrestre [1]). Il résulta de cette mesure, qu'avec un courant d'aimantation de 15 ampères, l'intensité s'élevait, au centre du miroir et par unité de volume, à 1400 unités C. G. S. Si l'intensité du courant d'aimantation montait à 22 amp., l'intensité de l'aimantation n'augmentait que de 2 pCt., de 7,5 à 22 ampères, l'augmentation était de 8 pCt. Ceci montre qu'une aimantation passablement forte se trouve atteinte et que l'anneau était à peu près saturé. Des observations faites avec la spirale d'épreuve montrèrent aussi que la quantité de lignes de force situées hors du miroir était très petite. Le miroir est plus mince en son milieu qu'à ses extrémités; et cette forme est

---

[1]) H. A. Rowland. On the Magnetic Permeability and the Maximum of Magnetism of Iron, Steel, and Nickel. Phil. Mag. Ser. 4, vol. 46.

précisément très favorable, quand il s'agit d'obtenir une forte aimantation en ce milieu même.

L'emploi des anneaux offre encore cet avantage, que l'on opère sur des masses de fer de petit volume, qu'il est plus facile d'aimanter fortement [1]). Il permet d'autre part de faire usage du spectromètre.

Les observations ont été faites sur deux anneaux d'égale dimension. Les constantes optiques du miroir, l'angle d'incidence principale et l'azimut principal ont été déterminés pour la lumière de réfrangibilité égale à celle de la raie *D*. Ces déterminations ont été effectuées avant que les anneaux n'eussent été aimantés, à l'aide du compensateur de Babinet [2]).

Les miroirs seront représentés par I et II.

Miroir.	Angle d'incid. princip.	Azimut princip.
I.	77° 23′ 5	26° 34′
II.	76° 30′ 5	26° 44′ [3])

B. *Disposition générale de l'appareil.*

11. Afin de pouvoir effectuer des mesures à des incidences très faibles et aussi à l'incidence normale, le collimateur et le polariseur sont établis indépendamment du spectromètre.

---

[1]) Le courant d'une machine dynamo-électrique peut ainsi rester disponible, et donner de la lumière électrique, quand la lumière solaire fait défaut. On emploie le plus souvent de massifs aimants de Ruhmkorff.

[2]) Voir, pour de plus amples détails, Sissingh, l. c. p. 36 et ssv.

[3]) Cette différence frappante entre les angles d'incidence principale de deux miroirs semblables en apparence, fut trouvée confirmée quand on répéta les mesures. On serait tenté de songer ici à une différence des couches superficielles; mais les miroirs sont taillés et polis de la même manière. J'ai observé plus d'une fois, et à un degré plus considérable, une variation dans les constantes optiques des miroirs, surtout dans l'angle d'incidence principale, quand la taille et le polissage s'étaient faits d'une façon différente. Ces faits nous procurent des données expérimentales pour une étude de l'influence des couches superficielles sur la réflexion, que j'espère pouvoir poursuivre ultérieurement.

Ces trois instruments (voir la planche III) sont fixés à la glissière *AA* d'un tour en fer, de telle sorte que les appareils peuvent être déplacés sans peine dans la direction du rayon incident, et conservent, étant fixés à l'établi, une position relative invariable. L'appareil portant le collimateur *B* repose sur un cadre de fer *C*, fixé au tour. Le collimateur lui-même tourne, à l'aide de la vis *a*, autour de la charnière *b*; et les deux vis *c* permettent de le déplacer vers le haut parallèlement à lui-même.

La pièce *D*, qui porte le polariseur, consiste essentiellement en une colonne de laiton *d*, que l'on peut faire tourner à l'aide de la vis *p* autour d'un axe vertical *e*, disposé sur une grande glissière *f*. Cette glissière se fixe sur le tour. Elle permet de déplacer le polariseur dans une direction perpendiculaire au tour, perpendiculaire par conséquent aussi au rayon incident. Le long de la partie supérieure de la colonne glisse un cylindre creux *g*, que l'on peut élever ou abaisser à l'aide d'un écrou *h*, vissé sur la colonne, et de deux forts ressorts à boudin *k*. Cette pièce mobile porte dans un manchon *l* le tube *E* du polariseur, qui peut y tourner, à l'aide d'une vis *m*, autour d'un axe horizontal. Un appareil de même nature supporte l'analyseur, quand on monte celui-ci, pour de petites incidences, indépendamment du spectromètre.

Ce dernier repose sur une plaque de fer carrée *F*, que l'on fixe à la glissière du tour. Deux colonnes de fer *n* sont vissées, suivant une diagonale, à cette plaque, et dépassent le spectromètre d'une certaine longueur. Elles portent une plaque rectangulaire *o* de laiton, passant au-dessus du cercle gradué du spectromètre; cette plaque porte à son tour, en son milieu, les anneaux, qui ne peuvent, à cause de leur poids et de leur dimension, être disposés sur la table du spectromètre. Les anneaux ne reposent toutefois pas sur la plaque *o* d'une façon immédiate, mais sont portés par une pièce qui permet de les déplacer dans deux directions perpendiculaires et de les tourner dans un plan horizontal; la pièce consiste donc

essentiellement en deux glissières *r*. La plaque qui, sur la glissière supérieure, porte les anneaux, repose sur un demi cercle *s*, de sorte que trois petites vis permettent de la disposer de telle manière, que la normale au miroir *t* se trouve placée perpendiculairement à l'axe du spectromètre. La plaque portant les glissières peut être serrée dans un anneau, et tournée alors à l'aide de la vis *w*, autour d'un axe vertical. Cette vis agit sur le levier *u*, fixé à l'anneau. Des déplacements de grande amplitude s'effectuent à la main, l'anneau étant, à cet effet, rendu libre.

Les glissières et l'anneau sont vissés à la plaque *y*, et celle-ci se fixe à son tour sur *o* à l'aide des vis *z*.

Si l'analyseur est monté indépendamment du spectromètre, on dispose l'appareil portant l'analyseur sur une pièce transversale de fer *G*, que l'on fixe solidement à l'établi. Cette pièce peut être déplacée sur le banc du tour, de manière que l'analyseur puisse être monté à côté de celui-ci. L'appareil entier est placé sur une pierre, isolée du reste du plancher.

12. Dans la construction de cet appareil on a, autant que possible, pris soin que les différentes parties puissent être placées dans la position requise, et solidement fixées dans cette position. Comme les rotations ne se montent qu'à quelques minutes, et que la manière dont on les mesure réclame une position fixe et invariable, surtout des miroirs et des nicols, il faut qu'il soit satisfait à ces deux conditions. La construction de cet appareil ne fut entreprise que lorsqu'il fut devenu évident qu'un appareil plus simple ne donnait pas de résultats auxquels on pût se fier [1]).

C. *Polariseur et analyseur.*

13. La manière dont on effectue les déterminations à l'aide du polariseur et de l'analyseur est la même que celle antérieurement employée pour la détermination des orientations

[1]) La discussion montra qu'une série entière d'observations, obtenue à l'aide de cet appareil, devait être rejetée.

principales; c'est-à-dire des positions où le polariseur et l'analyseur se trouvent dans le plan d'incidence et perpendiculairement à ce plan. Toutefois une meilleure orientation des nicols permit d'appliquer cette méthode d'une manière beaucoup plus rigoureuse [1]). Quand des faisceaux de rayons à-peu-près parallèles passent par deux nicols, on aperçoit, en tournant l'analyseur jusqu'à l'extinction, une bande obscure, qui se déplace à travers le champ. Si l'on rend cette disposition plus parfaite, en plaçant devant le polariseur un collimateur, d'où émergent des faisceaux parallèles et si l'on dispose derrière l'analyseur une lunette exactement mise au point pour des rayons de cette espèce, alors en chaque point du champ concourent des rayons qui tous ont passé par les nicols dans une même direction. Cette direction détermine le plan de polarisation des rayons; de sorte que l'état de la polarisation diffère en chaque point du champ. La bande obscure est le lieu géométrique des points où concourent les faisceaux lumineux, dont les plans de polarisation, dans les deux nicols, sont perpendicuaires l'un à l'autre. Si la bande passe par le milieu du champ, lorsque les axes du collimateur et des nicols sont parallèles entre eux, les plans de polarisation des rayons passant par les nicols dans la direction de l'axe sont perpendiculaires l'un à l'autre. Toutes les rotations des plans de polarisation sont ramenées à cette position des nicols. La bande sert de repère pour leur orientation; on la ramène toujours au centre du champ en faisant tourner le polariseur et l'analyseur, et cette opération est facilitée par ce qu'un fil fin, tendu sur la fente du collimateur et passant par le milieu de cette fente, indique la position du centre. Cette méthode de déterminer les positions des nicols remplace l'ancien mode d'orientation, où l'on estimait l'intensité lumineuse, le champ étant rendu

---

[1]) Sissingh. Metingen over elliptische polarisatie van het licht. p. 26, et *Arch. Néerl.* T. XX. — Voir aussi Lippich. Wiener Sitz. Ber. Bd. 85.

aussi obscur que possible. Pour que la bande soit nettement délimitée, l'intensité de la lumière ne doit pas être trop faible [1]), et l'angle que les axes des nicols font entre eux ne doit pas être trop grand. Il n'est en effet pas possible, dans ces circonstances, de placer perpendiculairement l'un à l'autre les plans de polarisation des rayons, qui ont passé par les nicols. Les points de plus petite intensité lumineuse, dans le champ, sont alors moins obscurs, et la bande est plus confuse, car des différences d'intensité s'apprécient d'autant mieux que celle-ci est plus petite. Cette méthode, dans laquelle la bande sert de repère, fut déjà antérieurement employée par moi pour la détermination des orientations principales; dans les expériences qui suivent je l'ai appliquée aux rotations à zéro et au minimum.

14. Le polariseur est un prisme de Lippich [2]), à faces terminales droites, qui ne font entre elles qu'un angle très-petit, de 1′ environ. Le bord a' du tube qui renferme le nicol se fixe à l'aide de 6 petites vis de réglage sur le bord du tube c', ce tube à son tour est glissé dans la boîte du cercle gradué. L'axe du nicol peut ainsi être placé parallèlement à l'axe du collimateur, c'est-à-dire à l'axe du faisceau incident. Ceci se fait en observant, à l'aide de la lunette du spectromètre, l'image réfléchie des fils du réticule dans la face terminale du nicol. Pendant la rotation l'image ne décrit qu'un cercle de faible rayon (environ 1′), de sorte que la boîte du cylindre gradué est, elle aussi, convenablement fixée dans le tube plus large où elle tourne. La déviation, subie par la direction de la lumière dans ce nicol, est très faible, de 1′ environ. Le polariseur peut du reste, à l'aide de l'appareil qui le porte, être placé de manière que l'axe du faisceau incident passe par l'axe du nicol. Le premier de ces axes s'obtient à l'aide d'un obturateur muni d'une petite ouverture au centre, que l'on adapte sur l'objectif.

[1]) Voir Lippich, l. c. p. 294.

[2]) Voir Lippich, Wiener Sitz. Ber. Bd. 91. p. 1047.

L'analyseur est constitué par un nicol à faces terminales obliques, et a été choisi de telle sorte que la bande dans le champ des nicols atteignît son maximum de netteté. La méthode qui a servi, pour le polariseur, à fixer la position de l'axe ne peut donc pas trouver ici son application. J'examinai en conséquence si la lumière, qui tombe sur le nicol dans la direction de l'axe, est réfléchie de telle sorte par la surface antérieure oblique, que la rotation lui fasse décrire un cercle autour du rayon incident [1]). A cet effet, je recueillis la lumière réfléchie par cette surface sur un écran portant des cercles, décrits avec l'axe du rayon incident comme centre. J'eus encore soin, en remplaçant la lunette, ayant servi à mettre en place les différentes parties du spectromètre, par celle qui porte l'analyseur devant l'objectif, de donner aux axes des deux tubes une position identique dans les manchons. On dispose, dans ce but, le manchon mobile du spectromètre de manière que la lunette fixée dans ce manchon et dans le manchon fixe opposé, soit perpendiculaire aux faces latérales de la plaque plan-parallèle de verre, placée sur la table du spectromètre. L'axe de la lunette a alors, dans les deux cas, la même direction. Si l'on place ensuite cette lunette dans un des manchons, et la lunette-analyseur dans l'autre, il s'agit d'avoir soin que l'image réfléchie des fils du réticule, dans une plaque de verre fixée sur l'analyseur, coïncide toujours avec les fils quand on fait tourner le nicol, ou ne décrive tout au moins qu'un cercle de faible rayon autour de ceux-ci [2]).

Cet ajustement plus précis du polariseur et de l'analyseur permet d'appliquer beaucoup plus rigoureusement la méthode d'orientation à l'aide de la bande. Si antérieurement,

---

[1]) Ce procédé est dû à Glazebrook.

[2]) L'oculaire de la lunette renfermant l'analyseur grossit environ 5 fois. Ce grossisement doit être tel que la bande puisse être nettement mise au point, et que la diminution de l'intensité lumineuse, quand le grossissement augmente, ne nuise pas trop à la netteté de la bande.

à de petites incidences, la bande était à peine visible, la détermination des positions principales et des rotations n'offre à présent plus la moindre difficulté, quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence; tous les inconvénients que présentait cette détermination se trouvent donc heureusement écartés.

15. Afin que l'on sache à quelles conditions satisfait l'appareil, quand il est monté, je décrirai ici brièvement de quelle manière les différentes parties sont réglées.

1° On dispose la lunette du spectromètre de manière que son axe soit perpendiculaire à celui du spectromètre et coupe cet axe [1]).

2° Le spectromètre se place sur la plaque *F* de telle sorte que, l'axe de la lunette étant parallèle à l'axe du collimateur, les deux axes soient en même temps placés dans le prolongement l'un de l'autre.

3° L'axe du polariseur se trouve placé sur le prolongement de l'axe du collimateur. La méthode des images réfléchies permet, à l'aide de la lunette, de rendre les axes rigoureusement parallèles. On peut de plus les faire coïncider à l'aide de la glissière *f* et de l'écrou *h* de la pièce *D*.

4° Le miroir est orienté pour l'angle d'incidence déterminé, de sorte que la normale au miroir se trouve dans le plan de l'axe de la lunette et de celui du collimateur, et

5° que le centre du miroir se trouve dans l'axe du collimateur, au point où cet axe coupe l'axe du spectromètre. Cette condition se trouve remplie quand l'axe du faisceau incident coïncide, après réflexion, avec l'axe de la lunette. Si l'on monte

---

[1]) Voir à ce sujet, entre autres, Righi. Ann. de Chim. et de Phys. sér. 6, vol. 4, p. 446, 456 Ann. de Chim. et de Phys., sér. 6, vol. 9, p. 127—131; Ann. de Chim. et de Phys., sér. 6 vol. 10, p. 208. La manière directe dont j'ai déterminé, suivant ma méthode, les orientations principales, est susceptible d'une exactitude beaucoup plus grande que la méthode approchée, dont Righi se sert, et qui ne permet d'ailleurs guère de déterminations précises pour des angles d'incidence de grande et de faible valeur. Voir aussi § 20 et 21.

l'analyseur indépendamment du spectromètre, l'on oriente la lunette et le miroir dans la position exigée par l'angle d'incidence, à l'aide de la plaque de verre plan-parallèle, placée sur la table du spectromètre [1]). Cette plaque est d'abord disposée de telle manière, que la normale fasse l'angle requis avec l'axe du faisceau incident; puis on porte l'axe de la lunette dans l'axe du faisceau réfléchi par la plaque. On enlève alors cette plaque, ainsi que la table du spectromètre; on met à la place la plaque o avec le miroir de fer, et l'on dispose celui-ci de telle manière, que le faisceau réfléchi passe par son centre et coïncide avec l'axe de la lunette.

D. *Détermination des petites rotations par lecture au miroir.*

16. Les rotations au minimum et à zéro n'atteignent que quelques minutes et ne peuvent être mesurées à l'aide des cercles gradués des nicols donnant les degrés, et d'un repère fixe sans vernier. Pour remédier à cet inconvénient, la méthode au miroir fut, depuis 1886, régulièrement appliquée. A cet effet, un prisme quadrangulaire droit f_1, percé d'une ouverture cylindrique, fut glissé sur le tube c_1, qui renferme le polariseur. Les faces latérales portent de petits miroirs, placés de manière qu'après une rotation du nicol de plus de 90°, la normale à l'un des miroirs occupe à peu près la position initiale de la normale au miroir voisin. Comme le polariseur ne s'emploie qu'orienté parallèlement au plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, et que les miroirs ont reçu une fois pour toutes une position fixe, il résulte de ce fait un grand avantage. A une distance d'environ 2,5 M. sont montées la lunette et l'échelle graduée, servant à observer la position du nicol. Ces deux pièces, ainsi que l'établi portant le spectromètre, reposent sur

---

1) Voir Sissingh, l. c. p. 15 et. ssv. Ici l'on suppose que l'axe du cercle et la table du spectomètre ont été, une fois pour toutes, placés parallèlement.

une pierre, et ne sont donc pas en rapport avec le plancher. Le polariseur est commandé par un long bras de cuivre g_1, fixé au plan du cercle. Près de l'analyseur, ce bras h_1 se trouve uni à un anneau k_1, serré au bord gradué du cercle par la vis m_1. L'anneau porte en son milieu un miroir l_1, mobile autour de deux axes, l'un vertical, l'autre horizontal, et servant à déterminer la position de l'analyseur. J'employai, en règle générale, une échelle et deux lunettes pour cette lecture au miroir; et sauf sous de très grandes incidences, la lecture à l'analyseur réclama encore un deuxième miroir fixe, monté à côté du tour. En faisant la lecture au miroir j'eus soin que la position des diverses pièces restât autant que possible invariable. La fixité des résultats des lectures fut vérifiée après chaque série d'orientations et toujours trouvée satisfaisante. Les déplacements ne se montèrent, si les intervalles de temps n'étaient pas trop considérables, qu'à une petite fraction de la distance entre deux divisions de l'échelle. Une minute correspond à un déplacement de 1,4 à 1,8 m.M., ou 1,4 a 1,8 divisions. La précision de cette lecture est comparable à celle obtenue avec la méthode d'orientation à l'aide des nicols (§ 13), à condition que les circonstances ne soient pas défavorables.

E. *Source lumineuse.*

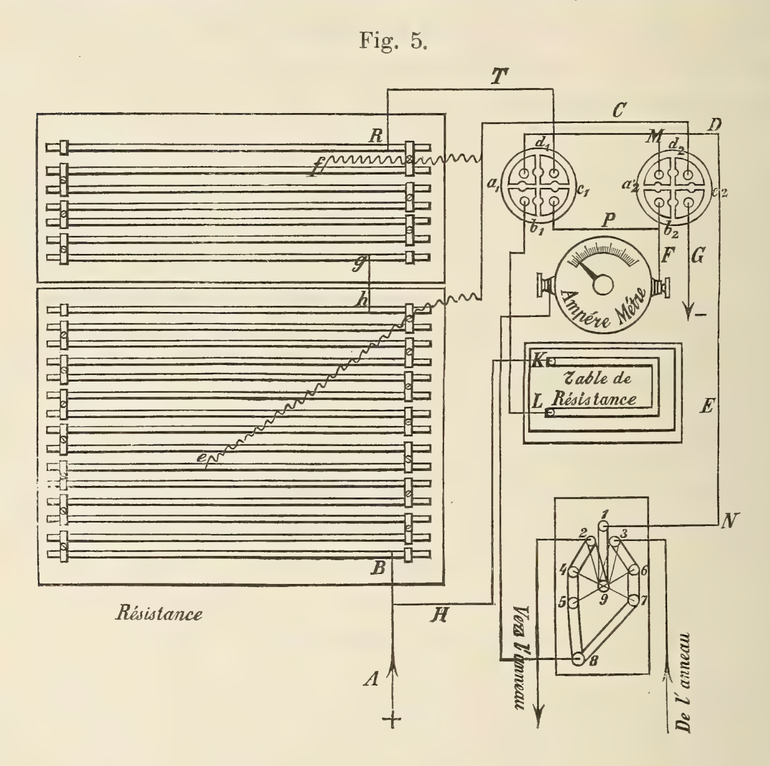
17. On se sert comme source lumineuse soit du soleil, soit d'une lampe électrique de laboratoire de Siemens, de 17 ampères. Le courant est fourni par une dynamo, actionnée par un moteur à gaz. Quelle que soit la perfection avec laquelle ces lampes sont construites de manière à donner une lumière à arc constante, les pointes ne restent pas toujours exactement à la même place, ce qui est, dans ces expériences, indispensable. On place donc, comme il a été fait antérieurement, la lampe dans une caisse que l'observateur peut déplacer dans le sens vertical, sans qu'il ait besoin de quitter sa

place [1]). Des écrans empêchent les rayons lumineux de s'échapper de l'appareil.

F. *Aimantation et désaimantation des anneaux.*

18. Le courant d'aimantation passe par une résistance et un ampère-mètre, ce qui permet de régler l'intensité et d'en faire la lecture. Un commutateur sert à renverser le courant.

Fig. 5.



Il est parfois nécessaire d'enlever leur magnétisme aux anneaux. Cela se fait en faisant passer des courants d'intensité décroissante et de signe inverse par les spirales de cuivre enveloppant l'anneau. Comme, grâce à la résistance, l'intensité peut être diminuée jusqu'à 2,3 ampères, mais que même dans ces conditions le magnétisme rémanent est encore trop

[1]) Voir Sissingh, l.c. p.12.

considérable, j'introduis la bobine d'aimantation dans un circuit latéral. Un ou deux commutateurs à bouchons permettent de donner au courant une direction telle, que l'intensité puisse être rapidement réduite à 2,3 amp. On peut de même, après cette opération, en déplaçant une couple de bouchons, engager la bobine dans le circuit latéral, et descendre finalement jusque 0,025 amp. La série entière d'appareils fut montée, comme on le fait dans les installations techniques, sur un tableau de distribution, et fixée à demeure à côté de l'appareil, sous la main de l'observateur. Elle est représentée fig. 5.

La clef du commutateur, reposant sur 9 et tournant autour de cette pièce comme axe, permet d'établir simultanément la communication entre 1 et 2, 6 et 7, ou entre 1 et 3, 4 et 5. 4 et 5, 6 et 7 peuvent être mis en rapport par ce que deux bandes de cuivre sont fixées extérieurement à une pièce de bois qui, dans la position moyenne de la clef, ne dépasse pas 5 et 7. Si l'anneau est inclus dans le courant principal, les bouchons b_2, d_2 se trouvent seuls dans la commutateur droit, et la trajet du courant est le suivant: $A B e (f) C d_e D E$ 1, 2, l'anneau, 3, 6, 7, 8, $F b_2 G$. L'anneau fait-il partie d'un circuit latéral, les ouvertures a_1, c_1, c_2 sont formées par des bouchons, le courant principal passe par $A B f C c_2 G$, et le courant secondaire par $H K L a_1 M N$ 1, 2, l'anneau, 3, 6, 7, 8, $F P c_1 T R$.

IV. Examen de la méthode d'observation.

19. Si μ seul change de signe avec le sens du courant d'aimantation, m restant invariable, la détermination des rotations au minimum et à zéro devient chose très simple. Les positions d'intensité nulle sont alors symétriques par rapport aux plans principaux, c'est-à-dire le plan d'incidence et un plan

perpendiculaire à celui-ci. On n'a pas besoin de connaître les positions des nicols dans lesquelles ils occupent les plans principaux, positions qui seront dorénavant appelées positions principales. On n'a pas besoin non plus de connaître, dans les rotations au minimum, l'angle que fait un des nicols avec un des plans principaux; mais on détermine les doubles rotations, tant au minimum qu'à zéro, en aimantant le miroir équatorialement, tantôt dans un sens tantôt dans l'autre [1]). Les form. (7) § 4 et (11) § 7 sont alors applicables au calcul de μ et de m, l'amplitude et la phase de la composante magnéto-optique.

Afin de s'assurer que cette condition a été remplie, il est nécessaire de déterminer les orientations principales des nicols quand le miroir est complètement désaimanté. On reconnaîtra que la désaimantation est complète à ceci que, l'opération se faisant à l'aide de courants alternativement de signe contraire et d'intensité décroissante, les orientations principales sont les mêmes, que l'on finisse par un courant positif ou négatif. La quantité de magnétisme rémanent est alors si faible, qu'elle n'exerce plus aucune influence sensible sur la réflexion.

A *Orientations principales des nicols après désaimantation des miroirs.*

20. Afin de déterminer l'influence du magnétisme rémanent, le miroir ayant été désaimanté de la manière ci-dessus indiquée, j'observai les orientations principales après désaimantation, pour l'incidence 51° 22′, à l'aide du miroir II. Y avait-il une influence sensible, je déterminais les rotations au minimum. Ces rotations sont encore très grandes pour une incidence $i = 51° \ 22'$, et peuvent encore être exactement déterminées (voir § 6), de sorte qu'on se trouve ainsi en possession d'un moyen très sensible de rechercher des traces d'aimantation.

---

[1]) Voir les équations (3)–(6) § 4 et (8)–(9) § 7.

Détermination des orientations principales après désaimantation. Courant initial + 15 amp. Courant final + 0.02^5 amp.

Lectures au polariseur.	Lectures à l'analyseur.
144,7	304,0
3,8	4,7
4,0	3,9
5,1	4,0
5,0	5,3
5,3	5,1
5,0	4,5
5,1	3,8
$144,7^5$	304,4.

Tout déplacement de 1′ du polariseur et de l'analyseur correspond, dans la lunette, à un déplacement de 1,56 et 1,66 divisions de l'échelle. J'indiquerai ceci dans la suite de la manière suivante:

$$1' p = 1{,}56, \quad 1' a = 1{,}66.$$

Ces grandeurs sont dites positives, quand des lectures plus élevées aux nicols, provoquées par des rotations positives, produisent des lectures plus élevées dans les lunettes Quand je donnai ainsi aux nicols leurs orientations principales, la bande qui apparaît dans le champ de la lunette à analyseur [1]), et qui sert à déterminer ces orientations, se trouva au milieu de la fente, et à peu près verticalement, c'est-à-dire dans la direction de cette dernière.

Cela fait, je désaimantai de nouveau le miroir, les nicols restant fixes. Courant initial + 15 amp. Courant final — $0{,}02^5$ amp.; le signe était donc l'inverse de ce qu'il était dans la série précédente La bande avait conservé la même position dans la lunette à analyseur.

---

[1]) J'entends la lunette qui porte l'analyseur devant l'objectif.

Positions principales	
Polariseur.	Analyseur.
144,9	304,9
4,5	3,3
4,9	5,8
5,2	4,8
4,5	3,9
4,7	3,8
5,4	4,4
4,7	3,8
144,8	304,3.

On obtient donc les mêmes valeurs, comme on pouvait s'y attendre du moment que la bande obscure restait en place.

21. Je repris enfin une ou deux fois la désaimantation, le courant final étant de ± 2,3 amp., et l'influence du magnétisme rémanent connue.

Courant initial 14,7 amp. courant final + 2,3 amp.

La bande obscure n'occupait plus le milieu de la fente; elle était passée au bord gauche, et un peu au-dessous du milieu. Ce fait trahit l'influence du magnétisme rémanent. Les rotations au minimum furent déterminées pour cette intensité d'aimantation, c'est-à-dire que la bande fut ramenée, à l'aide d'un des nicols, au milieu du champ.

Rotation au minimum de l'analyseur.
Lectures à l'analyseur.
308,7
8,3
8,0
7,5
8,0
7,2
8,2
8,2
308,0.

L'analyseur fut ensuite ramené à 304,3 c'est-à-dire la moyenne des déterminations précédentes, relatives aux positions principales, et je déterminai la rotation au minimum pour le polariseur.

Lectures au polariseur.

142,6
2,5
2,5
2,6
142,5^{5}.

Répétition de la désaimantation. Courant initial de 14,7 amp. Courant final de — 2,3 amp. Les nicols avaient conservé leur dernière position. La bande s'était déplacée, sous l'influence de l'aimantation rémanente, vers le côté droit de la fente.

Lectures au polariseur.

147,3
7,4
7,4
7,0
147,3.

Le polariseur fut orienté maintenant dans la position principale 144,8, et l'on procéda à l'observation de la rotation au minimum de l'analyseur.

Lectures à l'analyseur.

299,2
300,5
301,1
300,6
300,5
300,1
300,6
301,2
300,5.

La désaimantation fut enfin reprise une fois de plus; le courant final étant de 0,03 amp., et je cherchai les orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
144,2	304,8
4,9	4,5
5,4	4,7
4,9	4,0
4,8	3,8
5,5	4,5
5,5	5,0
4,7	4,5
145,0	304,5.

Ces observations ont donc conduit aux résultats suivants:

				Polaris. Orientat.	Anal. princip.	Polar. Orient.	Anal. au minim.
Désaimant.	jusqu'à	+ 0,03	amp.	$144,7^{5}$	304,4		
„	„	— 0,03	„	144,8	304,3		
„	„	+ 2,3	„			$142,5^{5}$	308,0
„	„	— 2,3	„			147,3	300,5
„	„	0,03	„	145,0	304,5		

Elles démontrent que la désaimantation à l'aide de courants de signe alternativement inverse et d'intensité décroissante maintient l'influence de la petite quantité de magnétisme rémanent dans les limites des erreurs d'observation [1]). Elles montrent de plus que les lectures à la lunette donnent des résultats suffisamment fixes, puisque au commencement et à la fin de la série les orientations principales sont à peu près les mêmes. La désaimantation à l'aide de courants jusqu'à 2,3 amp. permet de constater parfaitement l'influence du magnétisme rémanent; les rotations au minimum qu'il provoque sont les mêmes, que l'aimantation soit positive ou né-

[1]) Voir § 26 la précision des observations.

gative. Elles s'élèvent, exprimées en divisions de l'échelle, à — 2,3 et + 2,45 pour le polariseur, à + 3,6 et — 3,9 pour l'analyseur. Ces chiffres, réduits en minutes en posant $1'_p =$ 1,56, $1'_a =$ 1,66, deviennent pour le polariseur — 1,5 et + 1,6; pour l'analyseur + 2,2 et — 2,3.

B. *Comparaison de l'orientation principale des nicols chez le miroir de fer désaimanté et un miroir d'argent.*

22. Il y a une deuxième méthode d'examiner si réellement la désaimantation peut être complétement effectuée à l'aide de courants de signe alternatif et d'intensité décroissante; elle consiste à comparer les positions principales des nicols, obtenues pour le miroir de fer désaimanté, avec celles fournies, dans les mêmes circonstances, par un miroir d'argent. S'il y a encore aimantation, quelque faible qu'elle soit, chez le miroir de fer, on ne détermine pas à vrai dire les orientations principales, mais celles à zéro qui différent des premières. Suivant la méthode donnée par Martin [1]) je précipitai la couche réfléchissante d'argent sur le verre, le miroir fut fixé sur la table du spectromètre de manière que l'axe du cercle divisé se trouvât dans le plan du miroir [2]). Les orientations principales furent successivement déterminées à l'aide du miroir d'argent et du miroir de fer désaimanté, et cette opération fut répétée à plusieurs reprises. Il faut que le premier miroir soit disposé avec la table qui le porte sur le spectromètre, orienté de manière à donner l'incidence exacte; il faut d'autre part que le miroir de fer soit fixé, avec la plaque de laiton *o* (voir la planche III), au-dessus du spectromètre, et centré toujours de nouveau. Cependant le miroir ne subit pas de déplacements bien considérables, si l'on détermine d'avance, par des repères, la position de la plaque. On doit se servir, pour orienter toutes

---

[1]) A. Martin. Compt. Rend., T. 56, 1863 et Ann. de Chim. et de Phys. sér. 4, T. 15, 1868.

[2]) R. Sissingh, Metingen over de elliptische polarisatie van het licht, p. 18.

ces pièces, de la grande lunette du spectromètre; et il est donc nécessaire, pour les lectures au miroir, de remplacer par cette lunette la lunette à analyseur avec l'anneau et le miroir. Il vaut mieux aussi enlever quelquefois le polariseur, car les déviations que ce nicol fait subir à la lumière influent sur l'incidence et sur le centrage. Il faut de plus beaucoup de précautions quand on enlève les lunettes à nicols de leurs manchons et quand on les y replace; sinon les résultats des lectures ne sont plus les mêmes. Une minute correspond, en effet, dans la lunette, à 1,5 division de l'échelle; et même une petite différence de position des tubes dans leur manchon, ou un léger déplacement du miroir relativement au nicol, produit dans la lecture au miroir une modification considérable [1]).

Les observations, faites à l'incidence $i = 51° 22'$ à l'aide du miroir II conduisirent aux résultats suivants:

Orientations principales.

Miroir de fer.		Miroir d'argent.		Miroir de fer.	
Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
388,7	279,8	389,1	280,4	386,6	280,2
8,8	79,3	7,7	78,5	7,6	81,2
9,0	80,6	8,9	79,4	7,3	81,6
8,8	80,5	6,7	78,6	7,1	80,0
9,2	80,0	8,2	79,2	6,5	78,8
8,5	79,4	8,8	79,0	6,9	80.2
8,2	79,3	8,2	78,3	7,3	80,1
9,2	80,0	7,3	80,3	6,7	79,1
388,8	279,9	388,1	279,2	387,0	280,2.

[1]) J'ai pu constater que ces lectures sont constantes si l'enlèvement répété des lunettes se fait avec précaution.

Miroir d'argent.		Miroir de fer.	
Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
388,2	282,2	390,0	281,0
9,0	2,8	89,2	80,8
8,4	1,2	89,2	82,9
8,8	2,5	88,9	80,5
9,6	3,0	89,5	81,5
7,5	2,0	89,0	81,2
7,7	1,4	89,8	80,8
8,1	2,7⁵	89,4	82,4
388,4	282,2	389,4	281,4.

Les orientations principales sont donc:

	Polariseur.	Analyseur.
chez le miroir de fer	388,8	279,9
	387,0	280,2
	389,4	281,4
en moyenne	388,4	280,5
chez le miroir d'argent	388,1	279,2
	388,4	282,2
	388,2⁵	280,7

Quand, dans mes observations, je remplaçais les deux miroirs l'un par l'autre, la bande d'extinction continuait à passer d'ordinaire par le milieu du champ. Quelquefois cependant il n'y avait pas moyen d'enlever les nicols de leur manchon et de les y replacer sans leur faire subir une déviation légère. La bande était verticale pour le miroir de fer et quelque peu oblique pour le miroir d'argent. Ce fait résulte toutefois des propriétés optiques de ces métaux.

Après que le miroir d'argent eût été de nouveau centré sur la table du spectromètre, et le miroir de fer désaimanté une fois de plus, les nicols occupèrent les positions suivantes:

Miroir d'argent.		Miroir de fer.	
Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
388,8	283,2	387,6	282,9
8,0	2,8	7,4	1,5
7,8	2,1	7,6	2,9
8,0	3,0	7,7	2,3
7,4	3,1	7,4	1,9
7,5	2,5	6,9	1,9
8,2	3,7	7,2	1,9
7,8	3,0	7,9	2,3
387,9[5]	282,9	387,4[5]	282,2 [1]).

Je donne enfin les moyennes de quelques séries d'orientations, chacune de quatre lectures, de manière à faire se succéder plus rapidement les observations faites avec les deux miroirs.

Orientations principales.

Miroir de fer.		Miroir d'argent.	
Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
387,6[5]	279,6	387,0	280,5[5]
387,7	279,2	387,2	280,2[5]
388,5	280,9[5]	386,8	278,3
388,2	279,0	386,8[5]	280,9
387,5	279,8		
387,9	279,7	387,0	280,0

Une seconde série analogue donna:

Miroir de fer.		Miroir d'argent.	
Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
		387,2	284,6
387,0	283,7	387,4[5]	283,6
388,3	283,3 [2])	387,2	283,3
387,6[5]	283,5	387,3	283,8.

[1]) Les points zéro des lectures à l'échelle étaient, dans ces mesures, quelque peu différents de ce qu'ils étaient précédemment. Je n'ai pas attaché d'importance à ces déplacements du zéro quand, comme dans le cas présent, la valeur absolue de la lecture n'entre pas en ligne de compte.

[2]) Le miroir est désaimanté pour cette série d'observations.

Dans ces mesures, des rotations de 1′ du polariseur et de l'analyseur, ou $1'_p$ et $1'_a$ étaient, exprimées en degrés de l'échelle, 1,33 et 1,23. Vu la difficulté des observations de cette espèce, il est permis de conclure de ceci que les orientations principales, pour le miroir d'argent et le miroir de fer désaimanté, concordent dans les limites des erreurs possibles [1]).

C. *Détermination des rotations dans l'aimantation positive et négative.*

24. La détermination de l'amplitude et de la phase, μ et m, de la composante magnéto-optique se simplifie, comme il a déjà été remarqué, considérablement, si l'on peut admettre que μ change de signe avec le sens de l'aimantation, tandis que m conserve la même valeur. Si, en effet, il n'en était pas ainsi, il faudrait, chaque fois qu'une rotation à zéro a été déterminée, rechercher par désaimantation l'orientation principale, et connaître de plus, pour la rotation au minimum, la quantité dont un des nicols s'écarte de cette position. Quelque simple et évidente que paraisse cette hypothèse, il ne sera pas inutile d'examiner si les observations la confirment.

A cet effet, les rotations au minimum sont examinées en détail à l'aide du miroir II, à l'incidence $i = 51° \; 22'$, pour laquelle les rotations sont très considérables et peuvent encore être très exactement observées (§ 6). Il est nécessaire, pour une observation précise, que l'on dispose devant la fente du collimateur une autre fente, très étroite et transversale. L'emploi de la fente toute entière a l'inconvénient que l'intensité au milieu de la fente peut seulement être rendue minima, tandis qu'une rotation plus petite ou plus grande d'un des nicols rend l'intensité beaucoup plus faible qu'au milieu. La bande est, en cet endroit, beaucoup plus obscure. Tout déplacement,

[1]) Voir pour la précision des observations le § 26.

soit de l'analyseur, soit du polariseur, fait cheminer la bande à travers le champ, mais la partie la plus obscure reste au dessus ou au dessous de la partie médiane (voir fig. 6). Pour que l'on puisse juger si l'intensité lumineuse est à son minimum au milieu de la fente, il faut que la portion plus obscure de la bande soit recouverte par la fente transversale. Elle est indispensable pour arriver à des résultats exacts.

Fig. 6.

25. Il sera rendu compte en détail de ces observations, afin de montrer de quelle manière une telle série complète s'exécute à chaque incidence et pour rendre possible d'apprécier le degré d'exactitude atteint [1]).

Comme le polariseur se trouve à peu près dans le plan d'incidence quand il est repéré à 130 et 310, perpendiculairement à ce plan quand il occupe les positions 220 et 210, et que c'est sous ces orientations que toutes les observations ont été faites, je les représenterai dorénavant par Pi_1, Pi_2, Pp_1, Pp_2. Les indices i et p sont encore ici destinés à indiquer que le polariseur se trouve, soit dans le plan d'incidence, soit perpendiculairement à celui-ci. Ces orientations sont pour l'analyseur

$$Ai_1,\ Ai_2,\ Ap_1,\ Ap_2;\ 0,\ 180,\ 90,\ 270$$ [2]).

Miroir II. $I = 76°\ 30'5$, $H = 26°\ 44'$. Intensité d'aimantation équatoriale par unité de volume, 1400 C. G. S.

Détermination des rotations au minimum.

Angle d'incidence $i = 51°\ 22'$. Polariseur $\perp$ plan d'incidence.

Orientations principales du polariseur et de l'analyseur Pp_2, Ai_2.

---

[1]) La plupart des observations purent être faites à la lumière du soleil.

[2]) Des rotations positives donnent pour les deux nicols des lectures plus élevées.

Désaimantation. Orientations principales. Polariseur.	Analyseur.	Désaimantation répétée. La raie conserve sa place. Polariseur.	Analyseur.
385,5	281,7	385,6	283,0
5,5	2,1	6,2	3,1
6,0	2,4	6,8	3,5
6,0	3,2	6,4	3,7
5,8	3,3	6,6	4,2
5,5	2,8	5,7	2,7
5,7	2,7	6,7	3,7
5,5		5,7	3,0
385,7	282,6	386,2	$283,3^5$.

En moyenne P_{p_2} $385,9^5$, A_{i_2} 283,0.

Les nicols reçoivent successivement les orientations principales trouvées.

A. Polaris. à 386,3 [1]) Analys. orienté au minimum. Aimantation +.	Aimantation —.	B. Analys. à 283,4 Polaris. orienté au minimum. Amantation +.	Aimantation —.
278,9	288,2	382,4	389,6
7,6	8,1	1,8	$89,4^5$
8,8	8,8	1,9	90,4
8,1	9,2	2,0	90,1
278,1	288,6	382,0	389,9 [2])

d'où nous tirons

dans l'aimantation +, $\varphi_{pa}^{m} = -4,9$.

» » —, $\varphi_{pa}^{m} = +5,6$.

» » +, $\varphi_{pp}^{m} = -3,9^5$.

» » —, $\varphi_{pp}^{m} = +3,9^5$.

---

[1]) Ici le polariseur fait avec l'orientation principale un angle encore plus petit que 0'.3. Cet écartement n'exercera que peu d'influence sur les rotations au minimum. Le plus souvent d'ailleurs l'écartement est encore plus faible.

[2]) Dans toutes ces observations l'intensité d'aimantation par unité de volume était d'environ 1400 C. G. S.

Le miroir est désaimanté de nouveau.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
386,2	283,8
6,0	3,4
5,9	2,8
5,8	4,0
5,8	4,0
5,2	3,5
5,8	3,4
5,6	3,5
385,8	283,5⁵.

Ces orientations principales concordent parfaitement avec les précédentes.

Les observations faites pour fixer la valeur d'une division de l'échelle des rotations des nicols donnèrent

Polariseur.	Lecture à l'échelle.	En moyenne.
41°	342,2, 341,2	341,7
42°	418,2, 417,7⁵	418,0

$$\text{d'où } 1'_p = \frac{418,9 - 341,7}{60} = + 1,27.$$

Analyseur.		
184°	214,9, 216,3	215,6
183°	292,6, 293,4	293,0,

$$\text{d'où } 1'_a = \frac{-77,4}{60} = -1,29.$$

Positions des nicols P_{p_2}, A_{i_1}.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
384,8	277,2
5,2	5,2
4,2	5,5
4,0	7,0
3,7	6,8
4,0	6,5
4,0	6,8
5,0	6,2
383,3⁵	276,4.

Polariseur au repère 384,3		Analyseur au repère 276,3.	
Orientations analyseur.		Orientations polariseur.	
Aimant. +.	Aimant. —.	Aimant. +.	Aimant. —
271,7	$280,2^{5}$	379,8	$388,8^{5}$
2,0	1,3	79,8	8,2
1,9	1,8	80,3	8,6
$1,3^{5}$	0,7	79,3	7,7
			7,2
$271,7^{5}$	281,0	379,8	388,1.

φ_{pa}^{m} dans l'aimant. $+ = -4,6$
» » $- = +4,6^{5}$

φ_{pp}^{m} dans l'aimant. $+ = -4,5^{5}$
» » $- = +3,7^{5}$

Nous avons encore

Analyseur	Lecture à l'échelle.	
94°	206,5,	206,6
93°	283,3,	280,8,

$$\text{d'où } 1'_a = \frac{-75,0}{60} = -1,2^{5}.$$

Positions des nicols P_{p_1}, A_{i_1}.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
421,8	274,0
1,1	3,9
1,6	5,5
1,4	4,2
1,5	5,5
1,1	6,0
1,5	4,8
0,7	4,7
$421,3^{5}$	274,8.

Polariseur au repère $421,3^5$.		Analyseur au repère $274,8^5$.	
Orientations analyseur.		Orientations polariseur.	
Aimant. +.	Aimant. −.	Aimant. +.	Aimant. −.
279,3	270,8	424,8	417,0
81,2	70,3	4,7	6,9
80,8	69,8	5,0	7,5
79,2	69,2	5,4	5,6
81,2	69,4	6,0	5,8
		3,2	6,7
280,3	269,9	$424,8^5$	$416,7^5$.

Désaimantation répétée.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur
420,0	273,2
3,1	6,4
1,0	4,8
2,0	6,0
2,9	7,2
0,2	4,0
421,5	275,2.

Ces orientations principales concordent d'une manière satisfaisante avec celles trouvées antérieurement.

Si l'on prend pour les orientations principales les moyennes des premières et des dernières valeurs, on a

dans l'aimant. +, $\varphi^m_{pa} = - 5,3$, dans l'aimant. +, $\varphi^m_{pp} = -4,6^5$

» » −, » $= + 5,1$, » » −, » $= +3,4^5$.

Dans ces observations, on a

Polariseur.	Lecture à l'échelle.
221°	377,0, 377,8
222°	456,9, 457,5,

$$\text{d'où } 1'_p = \frac{79,8}{60} = 1,33.$$

Positions des nicols P_{p_1}, A_{i_2}.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
400,6	341,8
2,1	42,3
2,0	42,0
0,4	40,0
1,2	40,2
1,8	40,5
1,2	40,1
0,8	39,2
401,3	340,8

Polariseur au repère 401,3. Orientations de l'analyseur.		Analyseur au repère 340,7 Orientations du polariseur.	
Aimant. +.	Aimant. —.	Aimant. +.	Aimant. —.
335,1	346,3	397,5	405,9
5,8	5,4	7,4	6,0
5,2	5,2	8,1	6,0
5,4	5,4	8,7	5,0
335,4	345,8	397,9	405,7.

D'où il résulte

dans l'aimant. +, $\varphi_{ip}^{m} = -3,4$, dans l'aimant. +, $\varphi_{ia}^{m} = -5,4$.

» » —, » $= +4,4$, » » —, » $= +5,0$.

On a en même temps:

Analyseur.	Lecture à l'échelle.	
3°	282,0,	282,8
4°	204,8,	206,0

$$\text{donc } 1'_a = -\frac{282,4 - 205,0}{60} = -1,29.$$

Polariseur || au plan d'incidence.

Positions des nicols P_{i_1}, A_{p_1}.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
421,3	241,1
20,5	0,6
20,5	1,3
22,0	1,7
19,7	1,1
21,3	1,6
21,4	1,6
21,3	1,4
421,0	241,3.

Polariseur au repère 421,0 — Orientations de l'analyseur.

Analyseur au repère $241,2^5$. — Orientations du polariseur.

Aimantat. +	Aimantat. −	Aimantat. +	Aimantat. −
244,2	237,1	425,5	416,2
4,8	7,3	7,2	7,3
5,1	7,0	5,0	6,2
$4,8^5$	7,2	6,8	6,8
$244,7^5$	$237,1^5$	426,1	416,6.

Désaimantation.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
420,7	240,1
20,7	41,2
21,0	41,1
20,7	41,6
21,4	42,4
20,4	41,3
20,7	40,8
20,4	40,2
420,7	$241,1^5$.

Ces orientations sont donc suffisamment d'accord avec les précédentes.

Si l'on prend, pour les orientations principales, les moyennes des premières et des dernières observations, il vient

dans l'aimantat. $+$, $\varphi_{ip}^{m} = +5{,}2^{5}$, dans l'aimant. $+$, $\varphi_{ia}^{m} = +3{,}6$
» » $-$, » $= -4{,}2^{5}$, » » $-$, » $= -4{,}0$.

On a en même temps $1'_{p} = +1{,}26$, $1'_{a} = -1{,}22$.

Positions des nicols P_{i_2}, A_{p_1}.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
445,2	238,2
3,2	37,5
2,9	38,2
3,7	37,8
5,5	39,8
5,2	40,2
3,4	37,2
5,7	38,2
444,3[5]	238,4.

Polariseur au repère 444,3. Orientations de l'analyseur.		Analyseur au repère 238,2. Orientations du polariseur.	
Aimant. +	Aimant. —	Aimant. +	Aimant. —
242,2	235,7	450,5	439,4
2,4	4,5	49,9	40,6
1,6	4,3	48,8	39,0
1,8	4,5	49,5	36,9
2,6	5,7		
242,1	234,9	449,7	439,0.

D'où il résulte :

dans l'aimant. $+$, $\varphi_{ip}^{m} = +5{,}3^{5}$, dans l'aimant. $+$, $\varphi_{ia}^{m} = +3{,}7$.
» » $-$, » $= -5{,}3^{5}$, » » $-$, » $= -3{,}5$.

En même temps $1'_{p} = +1{,}33$.

Positions des nicols P_{i_2}, A_{p_2}.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
436,2	288,7
37,7	89,7
35,4	87,7
36,0	88,2
38,0	89,4
40,4	90,2
38,3	90,4
37,0	87,0
437,4	288,9.

Polariseur au repère 437,4.		Analyseur au repère 288,9.	
Orientations de l'analyseur.		Orientations du polariseur.	
Aimant. +	Aimant. —	Aimant. +	Aimant —
292,3	285,0	442,0	432,8
93,0	5,0	3,8	2,8
92,4	5,0	3,4	2,3
92,8	4,8	2,3	2,2
292,6	284,9[5]	442,9	432,5.

D'où il suit:

dans l'aimant. +, $\varphi^m_{ip} = +5{,}5$, dans l'aimant. +, $\varphi^m_{ia} = +3{,}9^5$.

» » —, » $= -4{,}9$, » » —, » $= -3{,}7$.

En même temps $1'_p = -1{,}32$.

Position des nicols P_{i_1}, A_{p_2}.

Orientations principales.

Polariseur.	Analyseur.
349,0	219,8
48,0	17,7
47,8	20,5
47,9	18,8
50,3	20,2
47,3	19,2
48,0	18,4
47,8	19,4
348,2[5]	219,2[5].

Polariseur au repère 348,3		Analyseur au repère $219,2^5$	
Orientations de l'analyseur.		Orientations du polariseur.	
Aimant. +	Aimant. —	Aimant. +	Aimant. —
223,6	214,6	352,8	342,7
3,9	14,9	2,4	3,0
4,1	15,0	4,2	2,8
3,8	14,3	2,8	2,0
		3,0	
223,8	214,7	353,0	342,6,

d'où

dans l'aimant. +, $\varphi_{ip}^{m} = +\ 4{,}7^5$ dans l'aimant. +, $\varphi_{ia}^{m} = +\ 4{,}5^5$

» » —, » $= -\ 5{,}6^5$ » » —, » $= -\ 4{,}5^5$

on a aussi $1'_p = +\ 1{,}31$.

Ces observations donnent donc, pour les rotations au minimum

φ_{ip}^{m},	φ_{ip}^{m},	φ_{ia}^{m},	φ_{ia}^{m},	φ_{pp}^{m},	φ_{pp}^{m},	φ_{pa}^{m},	φ_{pa}^{m},
Aim. +	Aim. —	Aim. +	Aim. —	Aim. +	Aim. —	Aim. +	Aim. —
$+\ 5{,}2^5$	$-\ 4{,}2^5$	+ 3,6	— 4,0	$-\ 3{,}9^5$	$+\ 3{,}9^5$	— 4,9	+ 5,6
$5{,}3^5$	$5{,}3^5$	3,7	3,5	$4{,}5^5$	$3{,}7^5$	4,6	$4{,}6^5$
5,5	4,9	$3{,}9^5$	3,7	$4{,}6^5$	$3{,}4^5$	5,3	5,1
$4{,}7^5$	$5{,}6^5$	$4{,}5^5$	$4{,}5^5$	3,4	4,4	5,4	5,0.

Les rotations, dans l'aimantation positive et négative, sont donc en moyenne, exprimées en divisions de l'échelle,

$+\ 5{,}2 \quad -\ 5{,}0, \quad +\ 3{,}9^5 \quad -\ 3{,}9^5, \quad -\ 4{,}1^5 \quad 3{,}9, \quad -\ 5{,}0^5 \quad +\ 5{,}1.$

Si l'on prend comme valeur à l'échelle d'une rotation de 1′ la moyenne des valeurs obtenues dans ces observations, c'est-à-dire $1'_p = +\ 1{,}30$, $1'_a = -\ 1{,}27$, les rotations au minimum sont, en minutes, dans l'aimantation positive et négative

φ_{ip}^{m}		φ_{ia}^{m}		φ_{pp}^{m}		φ_{pa}^{m}	
Aim. +	Aim. —	Aim. +	Aim. —	Aim. +	Aim. —	Aim. +	Aim. —
+ 40	$-\ 3{,}8^5$,	— 3,1	+ 3,1,	— 3,2	+ 3,0,	+ 4,0	— 4,0.

Ces observations, qui permettent l'emploi de la lumière solaire, montrent suffisamment que, dans les limites des erreurs d'observation, les rotations sont égales en grandeur dans

l'aimantation positive et négative, mais de signe différent. Il suit de là que la valeur de la composante magnéto-optique change de signe avec le sens de l'aimantation, mais que la phase reste la même. Je donnerai dans la suite comme doubles rotations au minimum les écarts subis par l'orientation d'un des nicols à l'intensité minima, quand l'aimantation se renverse. Ces angles sont, en effet, le double des rotations de cette espèce, que l'on observerait si un des nicols se trouvait exactement dans un des plans principaux.

D. *Exactitude des observations.*

26 Si l'on tire, par le calcul, de la série complète d'expériences qui vient d'être communiquée, et à l'incidence $i = 51°22'$, l'erreur moyenne commise dans une série d'observations, on voit que cette erreur est un peu plus grande qu'une division de l'échelle pour les déterminations des orientations principales; et, pour les rotations au minimum, un peu plus petite que cette quantité. Comme les valeurs à l'échelle de rotations de 1′ sont, pour les deux nicols, d'environ 1,3, l'erreur moyenne que l'on doit craindre peut, dans des circonstances favorables, être posée egale à $\frac{1'}{3}$ environ [1]). L'erreur s'élève donc à 10″ dans les valeurs données finalement pour les rotations au minimum, c'est-à-dire dans les moyennes des résultats de ces séries. Comme il a été remarqué plus haut, les rotations dans l'aimantation positive et négative concordent dans la limite des erreurs d'observation. L'intensité du faisceau in-

[1]) M. Righi rapporte (Ann. de Chim. et de Phys. Sér 6. T. 10. p. 208) que dans la détermination des orientations principales par voie indirecte il observa des écarts de 1′ entre les diverses déterminations. Le degré d'exactitude atteint dans mes expériences est donc plus considérable. Cela est d'ailleurs nécessaire si l'on veut donner d'une manière quelque peu précise les rotations d'un petit nombre de minutes dans la réflexion équatoriale, et que l'on ne peut, comme ici, déterminer les doubles rotations en renversant le signe de l'aimentation.

cident exerce une influence considérable sur l'exactitude des résultats, car cette intensité étant plus grande, la bande dans le champ du nicol est aussi plus nettement délimitée, et la mise au repère s'effectue avec beaucoup plus de précision. Si la lumière incidente n'est pas trop faible; si les nicols, et surtout les miroirs, sont exactement orientés, il faut un peu d'exercice pour que l'on puisse tirer complètement parti de la précision permise par l'emploi de cette bande. De longs bras, fixés au corps des nicols, permettant de mouvoir ceux-ci, la bande se dérobe d'abord à cause de sa grande mobilité, et peut difficilement recevoir dans le champ la position exacte

E. Comparaison des résultats obtenus par les méthodes des rotations au minimum et des rotations à zéro.

27. La valeur et la phase de la composante magnéto-optique se déduisent des rotations à zéro comme des rotations au minimum. Il s'agit dès lors d'examiner si les deux méthodes conduisent à des résultats identiques. Comme les rotations à zéro s'observent avec le moins de netteté pour de petites et de grandes incidences, et que c'est précisément aux autres incidences que les rotations au minimum présentent cet inconvénient, j'ai choisi, pour effectuer la comparaison, l'incidence $i = 51° 22'$. Il a déjà été remarqué qu'il faut faire usage d'une fente transversale pour obtenir des orientations exactes dans la méthode des rotations au minimum.

De même que pour ces rotations, je rapporte ici la série complète des observations faites, à l'incidence $i = 51° 22'$, à l'aide du miroir II. Comme il a été montré une fois pour toutes que les amplitudes μ de la composante magnéto-optique ne diffèrent que par le signe, et que le retard de phase m reste le même, je donnerai toutes les rotations à zéro dans le cas d'aimantation positive.

28. Rotations à zéro, observées à l'aide du miroir II à l'incidence $i = 51° 22'$, $I = 76° 30'.5$, $H = 26° 44'$. Aimantation équatoriale par unité de volume 1400 C. G. S.

Positions des nicols Pi_1, Ap_1.

Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
Aimantat. +.		Aimantat. —.	
48,5	230,0	48,3	241,3
48,2	229,8	47,2	241,0
46,8	228,6	48,7	242,0
48,0	230,3	49,1	241,0
47,9	229,7	48,2	241,3.

Observations de réduction, pour déterminer les valeurs d'une division de l'échelle en minutes.

Polariseur.	Lecture.		En moyenne.
127	56,9,	55,3	56,1
128	145,4,	145,2	145,3,

d'où il résulte que $1'_p = 1{,}49$.

Analyseur.			
274	220,8,	219,4	220,1
273	114,0,	111,6	112,8,

d'où il suit que $1'_a = 1{,}80$.

Nous déduisons de ces observations

$$2\,\varphi^\circ_{ip} = \frac{-0{,}4}{1{,}49} = -0',3. \qquad 2\,\varphi^\circ_{ia} = \frac{-11{,}6}{1{,}80} = -6',4.$$

Positions des nicols Pi_2, Ap_2.

Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
Aimantat. +.		Aimantat —.	
144,2	218,5	146,8	208,7
145,8	221,1	146,0	207,4
144,0	221,5	143,0	209,0
142,3	220,7	144,2	209,5
144,1	220,4	145,0	208,7.

Observations de réduction.

Polariseur.	Lecture.		En moyenne.
308	65,	63,7	64,3
307	154,	154,9	$154{,}4^5$

d'où $1'_p = 1{,}50$.

Analyseur.		
66	323 ; 319,4	321,2
67	225,4 ; 223,8	224,6

d'où $1'_a = - 1,61$.

De ces observations on tire

$$2\,\varphi^{\circ}_{ip} = \frac{-0.9}{1.5} = -0.6. \qquad 2\,\varphi^{\circ}_{ia} = \frac{+11,7}{-1,61} = -7,3.$$

Positions des nicols P_{p_2}, A_{i_2}.

Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
Aimantat. +		Aimantat. —	
396,5[5]	148,7	405,7	148,0
8,5	51,0	6,6	9,0
7,8	48,7[5]	7,9	9,0
8,0	50,0	7,7	9,7[5]
397,7	149,6	406,7	148,9[5]

Observations de réduction.

Polariseur.	Lecture.	En moyenne.
39	444,8 ; 443,2	444,0
38	361,8 ; 362,1	361,9[5]

d'où $1'_p = + 1,37$

Analyseur.		
183	203,4[5] ; 203,4	203,4
184	98,0 ; 96,6	97,3

d'où $1'_a = - 1,77$.

On en tire:

$$2\,\varphi^{\circ}_{pp} = \frac{-9,0}{1,37} = -6',6 \qquad 2\,\varphi^{\circ}_{pa} = \frac{+0,6^{5}}{-1,77} = -0',4.$$

Répétant ces orientations pour les mêmes positions des nicols, je trouvai

Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
Aimantat. +		Aimantat. —	
398,1	145,3	406,9	145,5
6,7	5,0	6,4	4,9
7,8	6,6	7,3	5,2
7,0	6,7	6,8	5,4
397,4	145,9	406,8	145,2[5]

Comme les mêmes valeurs s'appliquent ici à $1'_p$ et $1'_a$, on a

$$2\,\varphi^\circ_{pp} = \frac{-\,9,4}{1,37} = -6',9 \qquad 2\,\varphi^\circ_{pa} = \frac{+\,0,6^5}{-\,1,77} = -\,0',4.$$

Positions des nicols P_{p_1}, A_{i_1}.

Aimantat. +		Aimantat. —	
Polariseur.	Analyseur.	Polariseur.	Analyseur.
434,0	110,8	444,8	110,6⁵
4,3	10,2	3,8	0,5⁵
3,1	09,0	1,7	0,6
4,5	11,4	3,4	1,5⁵
434,0	110,3⁵	443,4	110,8⁵

Observations de réduction.

Polariseur.	Lecture.	En moyenne.
218	414,5 ; 413,0	413,7⁵
217	495,9 ; 495,0	495,4⁵

d'où $1'_p = 1,36$.

Analyseur.		
3	85,6 ; 87,6	86,6
4	187,0 ; 188,5	187,7⁵

d'où $1'_a = 1,69$.

D'où l'on tire

$$2\,\varphi^\circ_{pp} = \frac{-\,9,4}{1,36} = -\,6',9 \qquad 2\,\varphi^\circ_{pa} = \frac{-\,0,5}{1,69} = -\,0',30.$$

Ces observations ont donc donné:

$2\,\varphi^\circ_{ip}$	$2\,\varphi^\circ_{ia}$	$2\,\varphi^\circ_{pp}$	$2\,\varphi^\circ_{pa}$
— 0,3	— 6,4	— 6,6 ; — 6,9 } — 6,7⁵	— 0,4 ; — 0,4 } — 0,4
— 0,6	— 7,3	— 6,9	— 0,3,

en moyenne:

— 0,4⁵	— 6,8⁵	— 6,8	— 0,3⁵.

Il suit de ces données que l'erreur moyenne d'une série d'orientations s'élève, dans la méthode des rotations à zéro, à $\frac{3}{4}$ de division de l'échelle environ, ou, comme 1,5 divisions correspondent à $1'$, l'erreur moyenne sera de $0',5$. Les valeurs

des rotations à zéro, ou des moyennes des résultats de ces séries, peuvent donc être considérées comme exactes à 15″ près.

29. Si l'on tire, à l'aide des formules (7) § 5 et (11) § 7, respectivement des rotations au minimum et à zéro l'amplitude μ et la phase m de la composante magnéto-optique, il vient [1])

$2\,\varphi^{\circ}_{ip}$	$2\,\varphi^{\circ}_{ia}$	$2\,\varphi^{\circ}_{pp}$	$2\,\varphi^{\circ}_{pa}$
$-0{,}4^{5}$	$-6{,}8^{5}$	$-6{,}8$	$-0{,}3^{5}$
$-1{,}2^{5}$*	$-6{,}6^{5}$*	$-6{,}8$*	$-0{,}5$*

μ_i	μ_p	m_i	m_p
$+0{,}79\times10^{-3}$	$+0{,}81\times10^{3}$	180°−1°9′	180°−0°52′
0,69*	0,78*	180°−3°40′*	180°−1°17′5*

$2\,\varphi^{m}_{ip}$	$2\,\varphi^{m}_{ia}$	$2\,\varphi^{m}_{pp}$	$2\,\varphi^{m}_{pa}$
7,9	−6,2	−6,2	8,0
7,8*	−6,2	−6,4*	7,8*
		−6,2	8,1*

μ_i	μ_p	m_i	m_p
0,754	0,756	180°+5°35′	180°+7°21′
0,750*	0,775*	180°+3°47′*	180°−0°37′
	0,760*		180°+9°7′*

Les chiffres marqués d'un astérisque représentent des valeurs arbitrairement admises pour les rotations, afin de chercher l'influence, sur les valeurs calculées, d'une légère modification de celles données par l'observation. Les rotations observées fournissent elles-mêmes des données à ce sujet, puisque, si $\varphi^{m(o)}_{ip} = \varphi^{m(o)}_{pa}$ et $\varphi^{m(o)}_{ia} = \varphi^{m(o)}_{pp}$, $\mu_i = \mu_p$ et $m_i = m_p$.

Comme deux des rotations à zéro, savoir φ°_{ip} et φ°_{pa}, sont presque nulles, l'influence de l'aimantation, à cette incidence, équivaut à une rotation du plan de polarisation. Sous cet

[1]) Les formules servant à calculer f, h et Φ se trouvent au § 41. Dans le calcul des μ, les signes de ces grandeurs peuvent être choisis arbitrairement. Car alors seulement le quadrant de m se trouve déterminé. J'ai pris ici positivement μ_i et μ_p.

angle en effet, on peut, en tournant un des nicols, éteindre la lumière réfléchie. Il suit de là que les autres rotations à zéro, φ°_{ia} et φ°_{pp}, doivent être égales aux rotations au minimum correspondantes, puisque dans ce cas l'intensité minima se réduit à zéro. C'est ce que l'observation confirme.

Si l'on considère encore ce qui a été dit aux § 26 et § 28 concernant l'exactitude des résultats, on voit que, dans les limites des erreurs d'observation, les amplitudes et les phases tirées des observations des deux espèces sont concordantes. On voit encore que la précision avec laquelle les phases se déduisent, à cette incidence, des rotations au minimum, n'est pas très grande. A cette incidence, des variations de φ°_{ip} ou φ°_{pa} en provoquent de très fortes dans la valeur calculée de μ; et de même, des variations légères de φ^{m} influent très fort sur la phase m calculée. Le degré d'exactitude avec lequel μ est donné par les rotations au minimum, et m par celles à zéro, est très considérable. Il peut être posé pour μ égal à $0{,}01 \times 10^{-3}$, soit un peu plus de 1 pCt. et pour m, à un peu plus de 0,5°; ou, si l'on exprime les phases en longueurs d'onde, à plus de 0,5 pCt. Pour l'expression des amplitudes, celle du rayon incident a été prise comme unité.

F. Preuve que la réflexion est équatoriale.

30. J'ai décrit au § 10 le spectre magnétique des miroirs. J'ai pu constater que les lignes de force ne sont parallèles aux miroirs que près du centre, et en sortent à droite et à gauche. Les observations suivantes montrent combien il est indispensable que la réflexion ait lieu exactement en ce centre de la surface polie. Si la lumière tombe normalement sur le miroir, et qu'on observe les rayons réfléchis à l'aide d'une plaque de verre plan-parallèle, placée de manière à former un angle d'environ 45° avec le faisceau incident, l'aimantation provoque un déplacement, faible il est vrai, de la raie obscure dans le champ de l'analyseur, si l'incidence n'a pas lieu exactement au centre. Comme l'ai-

mantation parallèle au plan du miroir ne peut produire d'effet optique à l'incidence normale, cet effet doit être attribué à la composante magnétique perpendiculaire à la surface réfléchissante. Le signe de l'aimantation peut être déduit du sens du déplacement. Les lignes de force ne faisant, en dehors du centre, qu'un petit angle avec le plan du miroir, la composante perpendiculaire de l'aimantation sera sans doute très petite, mais l'effet d'une telle aimantation sera justement le plus grand à l'incidence normale. Afin d'avoir toujours une réflexion rigoureusement équatoriale et non mélangée de réflexion polaire, j'amène le faisceau incident, avec de grandes précautions, exactement au centre du miroir, et je le rends si ténu, que sa section ne soit que de un ou deux millimètres carrés. En résumé, l'effet optique de l'aimantation est nul à l'incidence normale. Si le faisceau incident ne tombe pas juste au centre de la surface polie, quelque faible que soit l'écart, toujours on observera, à l'aimantation, un déplacement de la raie obscure dans le champ de l'analyseur.

V. Résumé des différentes observations et des résultats auxquels elles conduisent. Comparaison des résultats obtenus avec ceux d'autres observateurs et avec la théorie.

A. *Rotations au minimum et à zéro sous diverses incidences.*

31. Les rotations au minimum et à zéro ont été observées, pour les deux miroirs, à des incidences diverses. Celles-ci ont été choisies de manière que, de l'incidence la plus grande à l'incidence $\alpha = 36°$, la différence de phase de la réflexion métallique diminue chaque fois d'environ $\frac{1}{16}$ de longueur d'onde. Depuis $\alpha = 36°$ jusque $\alpha = 0°$, les observations ont été faites à des incidences, qui chaque fois réduisent cette différence de

phase à environ la moitié. L'angle $\alpha = 61° 30'$ fut introduit dans les observations pour déterminer d'une manière plus précise la grandeur et la position de l'amplitude maxima de la composante magnéto-optique. On trouvera, pour chacune des positions des nicols, que l'on représente par $P_{i_1} \ldots . P_{i_4}$, $P_{p_1} \ldots . P_{p_4}$, de même par A_{i_1} etc., les rotations, et les moyennes que l'on en peut tirer. Chaque rotation est la moyenne d'une série de 8 observations, comme il a été indiqué antérieurement (voir § 25 et § 27).

Angle d'incid.	Miroir.	Positions des nicols.	$2\varphi^m_{ip}$	$2\varphi^m_{ia}$		$2\varphi^m_{pp}$	$2\varphi^m_{pa}$	$2\varphi^m_{ip}$	$2\varphi^m_{ia}$	$2\varphi^m_{pp}$	$2\varphi^m_{pa}$
86°	II	Pi_1, Ap_1	−2,0	−1,8^5;	Pp_1, Ai_1	−1,6	−1,9^5	−1,8	−1,7	−1,7	−1,8
		Pi_2, Ap_2	−1,6	−1,5^5;	Pp_2, Ai_2	−1,8	−1,7				
			$2\varphi^0_{ip}$	$2\varphi^0_{ia}$		$2\varphi^0_{pp}$	$2\varphi^0_{pa}$	$2\varphi^0_{ip}$	$2\varphi^0_{ia}$	$2\varphi^0_{pp}$	$2\varphi^0_{pa}$
82°30′	II	Pi_1, Ap_1	+3,5	−4,8;	Pp_2, Ai_2	−5,0	3,5	4,0^5	−4,9^5	−5,0	3,7^5
		Pi_2, Ap_2	4,6	−5,1;	Pp_1, Ai_1	−5,0	4,0				
76°30′,5	II	Pi_1, Ap_1	2,6	−5,6;	Pp_1, Ai_1	−4,9	2,6	2,7	−5,2^2	−4,8^5	2,6^5
(incid. princ.)		Pi_2, Ap_2	2,8	−4,9;	Pp_2, Ai_2	−4,8	2,7				
71°25′	II	Pi_1, Ap_1	2,6	−6,3;	Pp_1, Ai_1	−5,5	+2,0	2,2	−5,9^5	−5,2^5	2,2
		Pi_2, Ap_2	1,8	−5.6;	Pp_2, Ai_2	−5,0	+2,4				
61°30′	I	Pi_1, Ap_1	+0,9	−5,7;	Pp_1, Ai_1	−6,4^5	−0,2	0,4^5	−5,9^5	−6,3	−0,2^5
		Pi_2, Ap_2	+0,0	−6,2;	Pp_2, Ai_2	−6,1^5	−0,3				
51°22′	I	Pi_1, Ap_1	−0,8	−6,6^5;	Pp_1, Ai_1	−6,0	−0,3	−0,9^5	−6,8	−6,5	−0,3
		Pi_2, Ap_2	−1,2^5	−7,2;	Pp_2, Ai_2	−7,0	−0,2^5				
	I	Pi_1, Ap_1	−0,6	−7,3;	Pp_1, Ai_1	−7,5	−1,0	−0,2^5	−6,8	−7,0	−0,6
		Pi_2, Ap_2	+0,1	−6,3;	Pp_2, Ai_2	−6,5	−0,2				
	II	Pi_1, Ap_1	−0,3	−6,4;	Pp_1, Ai_1	−6,7^5	−0,4	−0,4^5	−6,8^5	−6,8	−0,3^5
		Pi_2, Ap_2	−0,6	−7,3;	Pp_2, Ai_2	−6,9	−0,3				
			$2\varphi^m_{ip}$	$2\varphi^m_{ia}$		$2\varphi^m_{pp}$	$2\varphi^m_{pa}$	$2\varphi^m_{ip}$	$2\varphi^m_{ia}$	$2\varphi^m_{pp}$	$2\varphi^m_{pa}$
	II	Pi_1, Ap_1	7,3	−6,0;	Pp_1, Ai_2	−6,1	8,2	7,9	−6,2	−6,2	8,0
		Pi_1, Ap_2	8.0	−7,2;	Pp_1, Ai_1	−6,4	8,2				
		Pi_2, Ap_1	8,2	−5,7;	Pp_2, Ai_1	−6,2	7,3				
		Pi_2, Ap_2	8,0	−6,0;	Pp_2, Ai_2	−6,0	8,3				
	I	Pi_1, Ap_1	7,7	−6,2;	Pp_1, Ai_1	−5,9	7,8	8,0	−6,5	−6,5	8,2
		Pi_2, Ap_2	8,3	−6,8;	Pp_2, Ai_2	−7,1	8.6				
36°10′	I	Pi_1, Ap_1	5,8	−5,5;	Pp_1, Ai_1	−6,1	6,2	6,1	−5,7	−5,6^5	6,3^5
		Pi_2, Ap_2	6,4	−5,9;	Pp_2, Ai_2	−5,1	6,5				

Angle d'incid.	Miroir.	Positions des nicols.	$2\varphi^o_{ip}$	$2\varphi^o_{ia}$		$2\varphi^o_{pp}$	$2\varphi^o_{pa}$	$2\varphi^o_{ip}$	$2\varphi^o_{ia}$	$2\varphi^o_{pp}$	$2\varphi^o_{pa}$
36°10′	I	....			P_{p_1}, A_{i_1}	− 7,8	−3,0			−6,9^5	−3,0
		....			P_{p_2}, A_{i_2}	− 8,1	−3,0				
	II	P_{i_1}, A_{p_1}	−3,0	− 8,3;	P_{p_1}, A_{i_1}	−7,9	−3,1	−3,7	−8,9	−8,5	−3,8
		P_{i_2}, A_{p_2}	− 4,7	− 8,9;	P_{p_2}, A_{i_2}	− 9,1	−4,5				
			$2\varphi^m_{ip}$	$2\varphi^m_{ia}$		$2\varphi^m_{pp}$	$2\varphi^m_{pa}$	$2\varphi^m_{ip}$	$2\varphi^m_{ia}$	$2\varphi^m_{pp}$	$2\varphi^m_{pa}$
24°16′5	II	P_{i_1}, A_{p_1}	4,0	− 4,1;	P_{p_1}, A_{i_1}	− 3,9	3,8	3,9	− 3,7	−3,8	−3,9
		P_{i_2}, A_{p_2}	3,8	− 3,3;	P_{p_2}, A_{i_2}	−3,7	4,0				
12°	II	P_{i_1}, A_{p_1}	2,2	−2,1;	P_{p_1}, A_{i_1}	− 2,0	2,1^5	2,0	−1,9^5	−1,9^5	2,0
		P_{i_2}, A_{p_2}	1,8	−1,8;	P_{p_2}, A_{i_2}	− 1,9	1,8^5				
6°	II	P_{i_1}, A_{p_1}	0,9^5	−1,2;	P_{p_1}, A_{i_1}	−0,95	0,99	1,0	−1,0	−0,96	−0,97^5
		P_{i_2}, A_{p_2}	1,0^5	−0,8;	P_{p_2}, A_{i_2}	− 0,97	0,96				

B. Valeurs calculées de l'amplitude μ et de la phase m de la composante magnéto-optique.

32. Les rotations observées permettent de calculer μ et m d'après les formules (8) § 5 et (12) § 7. Les signes de μ peuvent être choisis arbitrairement, et le quadrant de m déterminé en conséquence. μ_i et μ_p ont été choisis ici positivement, ce qui rend $m_i = m_p$ [1]). Le tableau suivant contient les valeurs moyennes des rotations et les valeurs calculées pour μ et m; j'y ai joint les résultats de certains calculs, dans lesquels on prend pour les rotations des valeurs quelque peu différentes. Ces résultats sont marqués d'un astérisque. Ils permettent de déterminer l'exactitude des grandeurs calculées. Celles de ces grandeurs qui méritent moins de confiance par ce qu'elles subissent fortement l'effet des erreurs d'observation, sont placées entre crochets. Les deux dernières colonnes renferment les moyennes de μ_i et μ_p, m_i et m_p.

---

1) Les formules servant à calculer f, h et Φ sont données au § 41.

Aimantation équatoriale 1400 C. G. S. par unité de volume.

Miroir I. $I = 77^\circ\, 23',5$; $H = 26^\circ\, 34'$
„ II. $I = 76^\circ\, 30',5$; $H = 26^\circ\, 44'$ Lumière jaune.

Angle d'incid.	Miroir. Nature des rotations.	Valeur moyenne des rotations. $2\varphi_{ip}^{m(o)}$	$2\varphi_{ia}^{m(o)}$	$2\varphi_{pp}^{m(o)}$	$2\varphi_{pa}^{m(o)}$	$10^3 \times \mu_i$	$10^3 \times \mu_p$	$m^i - 180^\circ$	$m^p - 180^\circ$	Moyenne de $10^3 \times \mu$	Moyenne de $m - 180^\circ$
86°	II φ^m	−1,8	−1,7	−1,7	−1,8	+0,28	+0,28	29°26′	29°26′	0,28	29°26′
		−1,8*	−1,6*			+0,23*		10°19′*			
82°30′	II φ^o	−4,0^5	−4,9^5	−5,0	3,7^5	+0,50	+0,56	25°39′	23°4′5	0,53	24°22′
76°30′,5	II φ^o	2,7	−5,2^5	−4,8^5	2,6^5	0,74	+0,69	14°23′	15°14′	0,71^5	14°49′
71°25′	II φ^o	2,2	−5,9^5	−5,2^5	2,2	0,86	+0,77	9°29′	10°37′	0,81^5	10°3′
61°30′	I φ^o	−0,4^5	−5,9^5	−6,3	−0,2^5	0,81	+0,83	2°22′	1°6′	0,82	1°49′
51°22′	I φ^o	−0,9^5	−6,8	−6,5	−0,3	0,75	+0,77	2°24′	−0°44′ }	0,78^5	−0°5′
	I φ^o	−0,2^5	−6,8	−7,0	−0,6	0,82	+0,80	−0°35′	−1°25′ }		
	II φ^o	−0,4^5	−6,8^5	−6,8	−0,3^5	0,79	+0,81	−1°9′	−0°52′	0,80	−1°0′
	II φ^m	7,9	−6,2	−6,2	−8,0	0,75^4	+0,75^6	[5°35′	7°21′]	0,75^5	
	I φ^m	8,0	−6,5	−6,5	8,2	0,79^6	+0,80	[1°15′	5°5′]	0,80	
36°10′	II φ^o	−3,7	−8,9	−8,5	−3,8	0,66	+0,60	5°31′	6°11′	0,63	5°51′
	I φ^o			−6,9^5	−3,0		+0,50		5°33′		
	I φ^m	6,1	−5,7	−5,6^5	6,3^5	0,68	+0,66	[14°7′	2°59′]		
				−5,7*	6,0^5*		+0,69*		16°46′*		
24°16′,5	II φ^m	3,9	−3,7	−3,8	3,9	0,41	+0,45	[1°18′	21°35′]	0,43	dout.
		3,9*	−4,0*			0,61*		17°29′*			
12°	I φ^m	2,0	−1,9^5	−1,9^5	2,0	0,26	+0,26	[34°43′	34°43′]	0,26	„
				−2,0^5*	2,1*		+0,54*	64°49′			
6°	II φ^m	1,0	−1,0	−0,96	−0,96^5	0,14	0,11	[37°59′	23°10′]	0,12^5	„
		1,0*	−0,997*			0,10*		6°51′*			
		1,0*	−0,95*			1,18*		85°0′*			

33. Si l'on examine à combien s'élève l'erreur à craindre dans les résultats de ces mesures, on verra que, si les incidences ne sont pas trop petites, le degré de précision atteint par les amplitudes μ est un peu plus grand que $0{,}03 \times 10^{-3}$, tandis que celui atteint par les phases est de 1° environ [1]). Mais les valeurs tirées pour les phases des rotations au minimum, à l'incidence $\alpha = 51^\circ$ et à des incidences plus petites,

[1]) Comme chaque rotation est la moyenne de 4 séries d'observations, et non plus de 8 comme au § 25, les erreurs sont indiquées ici plus grandes. L'évaluation de la précision que je donne ici n'est certainement pas exagérée.

ne sont que très peu exactes, vu la grande influence exercée sur les valeurs calculées par une variation légère de celles données par l'observation. Des incidences très petites diminuent aussi la précision des calculs relatifs à μ. Une modification peu importante dans la différence de φ^m_{ip} et φ^m_{ia}, φ^m_{pp} et φ^m_{pa}, trouble considérablement la valeur calculée de l'amplitude.

Il est au premier abord évident que l'on a, dans les limites des erreurs d'observation, $\varphi^{m(o)}_{ip} = \varphi^{m(o)}_{pa}$, $\varphi^{m(o)}_{ia} = \varphi^{m(o)}_{pp}$. C'est ce qui résulte aussi de toutes les observations antérieures où l'on a déterminé ces rotations d'une manière détaillée. Nous en tirons que $\mu_i = + \mu_p$, $m_i = m_p$. La valeur de l'amplitude et du retard de phase de la composante magnéto-optique ne change donc pas, que la lumière incidente soit polarisée dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à celui-ci. Les retards de phase se calculent toujours relativement à la composante de la réflexion métallique ordinaire, laquelle composante est polarisée dans le plan d'incidence. Si l'on veut bien se rendre compte de la signification du résultat qui vient d'être obtenu, il faut se rappeler les définitions du § 2. Les observations démontrent-elles donc que $\mu_i = + \mu_p$, $m_i = m_p$, il est permis, afin d'obtenir des chiffres plus exacts, de prendre la moyenne des valeurs calculées de μ_i et μ_p, m_i et m_p. Ces valeurs sont inscrites dans les deux dernières colonnes.

Le tableau montre qu'au voisinage de l'incidence de 60°, les rotations à zéro φ^o_{ip} et φ^o_{pa} sont nulles. Comme il a déjà été remarqué § 29, l'influence de l'aimantation consiste alors à faire tourner le plan de polarisation. Le retard de phase de la composante magnéto-optique est en effet de 180° [1]). Dans le voisinage de l'incidence de 80° il y a deux rotations au minimum qui deviennent nulles, savoir φ^m_{ip} et φ^m_{pa}. A

[1] M. Righi appelle cette incidence »incidence singulière". *Ann. de Chim. et de Phys.* Sér. 6, vol. 10, p. 218.

l'incidence principale, les deux espèces de rotations sont équivalentes (voir § 9), et par conséquent $\varphi_{ip}^{m} = +2{,}7$.

Les observations donnent encore

$$\text{pour } \alpha = 86, \ \varphi_{ip}^{m} = -1{,}8,$$
$$\text{„} \ \alpha = 81, \ \text{„} \ = -0{,}8,$$

de sorte que sous une incidence comprise entre 76°,5 et 81°, mais plus rapprochée de 81°, φ_{ip}^{m}, et par conséquent aussi φ_{pa}^{m}, sont nuls.

Ce fait, que φ_{ip}^{m} se réduit à zéro, a la signification suivante. Les formules du § 4 montrent que $\varphi_{ip}^{m} = \varphi_{pa}^{m} = 0$, quand le retard de phase de la composante magnéto-optique par rapport au faisceau réfléchi, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, ou $m_i - \Phi$, est égal à 90° [1]). Comme d'autre part

$$\text{pour } \alpha = 82°30', \ m_i = 180° + 24°22', \ \Phi = 129°21'5,$$
$$m_i - \Phi = 90° - 15°$$
$$\text{„} \ \alpha = 76°30'5, \ m_i = 180° + 14°49', \ \Phi = 90°,$$
$$m_i - \Phi = 90° + 14°49',$$

on voit encore de cette manière que cet angle est voisin de 80°. On pourrait déterminer cet angle le plus facilement comme suit. Si $\left\{\begin{array}{l}\text{l'analyseur}\\ \text{le polariseur}\end{array}\right.$ est orienté $\begin{array}{c}\text{perpendiculairement au}\\ \text{dans le}\end{array}\Big\}$ plan d'incidence, chaque rotation $\left\{\begin{array}{l}\text{du polariseur,}\\ \text{de l'analyseur,}\end{array}\right.$ dans une direction quelconque, produit sous cette incidence une augmentation d'intensité du faisceau émergeant de l'analyseur.

Si l'on fait tomber de la lumière polarisée dans le plan d'incidence sur un miroir de fer aimanté, les vibrations réfléchies sont en général polarisées elliptiquement. Dans le voisinage de 60° toutefois, ce sont des vibrations rectilignement polarisées que fournit la réflexion. De même, quand des rayons polarisés perpendiculairement au plan d'incidence tombent sur le miroir, la polarisation de la lumière réfléchie est

[1]) Voir Kaz, l.c. p. 42.

elliptique. L'incidence de 80° présente cette particularité, que les axes de l'ellipse se trouvent dans le plan d'incidence et le plan perpendi culaire à celui-ci. Mais les vibrations réfléchies ne peuvent subir la polarisation rectiligne que si la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence ; et les axes des ellipses décrites par les particules d'éther ne peuvent se trouver dans ce plan et dans un plan perpendiculaire à celui-ci, que si les rayons incidents sont polarisés perpendiculairement à ce plan d'incidence [1]).

C. *Parallèle entre les résultats obtenus et la théorie de M. Lorentz.*

34. Peu après la découverte du phénomène de Hall, M. Rowland fit remarquer que cet effet de l'aimantation sur le courant électrique doit se manifester, dans la théorie de Maxwell, qui considère les vibrations lumineuses comme des mouvements électriques, sous forme d'une rotation du plan de polarisation. M. H. A. Lorentz [2]) montra à son tour que l'on peut expliquer le phénomène de Kerr en admettant l'hypothèse d'une force électromotrice transversale, développée par tout mouvement d'électricité dans un champ magnétique ; il donna la théorie de la réflexion polaire normale, et montra la voie à suivre dans le cas d'incidence oblique [3]). M. Van Loghem [4]) à étudié en détail par cette méthode la réflexion polaire et équatoriale.

---

[1]) Voir Righi. *Ann. de Chim. et de Phys.* Sér. 6, T. 10, p. 212, 219. M. Righi décrit l'influence de l'aimantation comme se ramenant à une rotation et à de l'ellipticité. A une première incidence, qu'il appelle »incidence singulière'' il y a seulement rotation, à une autre seulement ellipticité. Ce deuxième angle est ce qu'il appelle l'angle d'incidence principale du fer aimanté. Comme il a été remarqué plus haut, ceci ne peut s'appliquer qu'à un état de polarisation déterminé de la lumière incidente.

[2]) H. A. Lorentz, *Verslagen en Mededeel. d. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam.* Reeks II, Deel XIX.

[3]) Van Loghem [voir [4])], p. 45.

[4]) Van Loghem, *Theorie der terugkaatsing van het licht der magneten, Leiden.* 1883.

J'ai déjà tâché antérieurement de donner la preuve expérimentale pour une des hypothèses [1]) qui ont été introduites dans cette théorie. On admet, en effet, que la constante de la polarisation magnétique est la même dans l'air et dans le fer; en d'autres termes que, les forces magnétiques développées par les vibrations électriques se succédant si rapiment, les molécules du fer n'ont pas le temps de les suivre. Or, ceci peut être démontré expérimentalement. La réflexion par le fer, en effet, ne se distingue en rien de celle par les autres métaux non magnétiques [2]). La théorie admet en outre, que l'effet exercé par l'aimantation sur le courant électrique peut être directement rapporté aux mouvements d'électricité périodiques et rapides supposés par la théorie électro-magnétique de la lumière. Des recherches ultérieures sur le phénomène de Hall, qui démontrèrent entre autres la variation très étendue de cet effet avec la température, rendent cette hypothèse moins probable. Elle est d'ailleurs en contradiction avec le peu d'influence de la température sur les constantes optiques du fer, fait que j'ai pu observer [3]). On devrait donc plutôt conclure de tout ceci que la résistance aux vibrations électriques périodiques rapides est tout autre chose que la résistance galvanique; et que les propriétés des courants électriques ordinaires ne peuvent être admises sans contrôle pour les courants considérés dans la théorie électro-magnétique de la lumière. Quoiqu'il en soit, il sera sans aucun doute important de comparer les résultats de ces observations avec la théorie. De même que par les deux observations rapportées ci-dessus, nous obtiendrons par là des données expérimentales

---

[1]) Lorentz, *Versl. en Mededeel.* Reeks II, Deel XIX, p. 246.

[2]) Sissingh, l.c., p. 129.

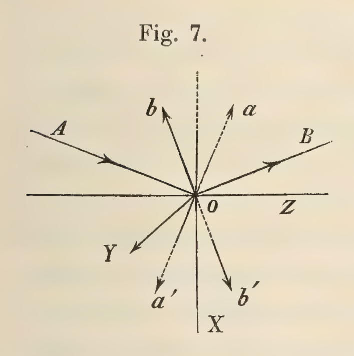
[3]) Sissingh, l c., p. 133. Il est vrai que M. Kundt met en doute (*Berl. Sitzungsber.* 1888) le résultat obtenu ici, mais celui-ci est confirmé par les expériences de M. du Bois (*Wied. Ann.* 39, p. 35), qui démontrent que l'influence de la température sur les rotations est peu sensible dans la réflexion polaire normale.

relatives au mouvement électrique de la lumière dans les métaux.

35. Avant de calculer toutefois les différentes grandeurs à l'aide des formules [1]) que la théorie permet de déduire, et de les comparer aux résultats de l'observation, il faut examiner de quelle manière seront rendues concordantes les déterminations sur lesquelles on se fonde dans la théorie, et celles introduites au § 2, pour définir sans équivoque possible les grandeurs observées.

Dans l'explication de la réflexion, y compris la réflexion métallique, telle que M. Lorentz l'a donnée en s'appuyant sur la théorie électro-magnétique [2]), le système des coordonnées est choisi de manière que le plan YZ soit la surface limite, que le faisceau incident se trouve du côté négatif du plan XY [3]), et qu'une rotation des X vers l'axe des Y, vue de l'axe des Z, soit positive [4]). Ce système de coordonnées est représenté fig. 7. Les formules de la page 20 (l.c.), montrent ensuite que les directions OY, Oa et OY, Ob sont prises comme directions positives pour les amplitudes des faisceaux lumineux, qui se propagent suivant AO et OB.

Fig. 7.



Il résulte d'autre part des formules, page 154 (l.c.), que q et r doivent avoir le même signe, pour que le système d'ondes se propageant dans le métal ait une amplitude décroissante dans le sens de la propagation. q et r

[1]) On trouvera au § 44 un tableau des formules, tant pour la réflexion ordinaire que pour celle sur un métal.

[2]) H. A. Lorentz. *Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht. Leiden*, 1875.

[3]) Lorentz, l.c. p. 9.

[4]) Lorentz, l.c. p. 59.

peuvent être pris positivement, puisque la quantité R^2 seule est déterminée. La quantité σ (pag. 164) est alors positive; τ est un angle dans le premier quadrant. D'après la deuxième des formules (19), page 164, $\sin 2\omega$ et $\sin 2\tau$ ont le même signe, de sorte que $\sin 2\omega$ est positif. L'expression du mouvement de la lumière dans le métal (page 160) renferme le facteur

$$e^{i\frac{2\pi x}{T}R_2 \cos \alpha_2} = e^{i\frac{2\pi x}{T}R_1 \varrho \sigma e^{i(\tau+\omega)}}$$

(voir page 164), ou le facteur réel

$$e^{-\frac{2\pi x}{T}R_1 \varrho \sigma \sin(\tau+\omega)}.$$

On obtient une diminution de l'amplitude, les vibrations se propageant dans le métal, quand ϱ et $\sin(\tau+\omega)$ sont pris positivement. Comme τ se trouve dans le premier quadrant et que $\sin 2\omega$ est positif, il faut que l'on prenne aussi pour ω un angle aigu.

OY, Oa et Ob (fig. 7) sont, dans la théorie, les directions positives des amplitudes, que représentent, dans les observations (voir § 2), OY, Oa' et Ob. La théorie admet que du rayon incident, se propageant suivant AO en exécutant des vibrations dans le sens OY, naît un rayon réfléchi suivant OB, vibrant dans le même sens OY. C'est ce qui a également été admis ici, dans la détermination des différentes quantités (§ 2). Lors des observations (voir § 2), il a été supposé en outre, que d'un rayon incident AO vibrant suivant Oa' résulte un rayon réfléchi OB, exécutant des vibrations suivant Ob. Mais la théorie donne Ob comme sens des vibrations résultant d'un faisceau incident vibrant suivant Oa. D'où il suit que les amplitudes des faisceaux réfléchis sont, suivant la théorie, f et $-h$; et que k, le rapport de ces amplitudes, est négatif. Or, les formules de la page 167 [1]) montrent que $\sin(d_s - d_p) = \sin \Phi$ a le même signe que $-C''$, et est donc positif. Les expressions

[1]) Lorentz, l.c.

de la page 165, entre autres, font voir que d_s et d_p, et par conséquent aussi Φ, sont des retards de phase. La théorie conduit donc, d'accord avec les observations, à ce résultat, que le rayon réfléchi, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, subit un retard de marche relativement au faisceau polarisé dans ce plan. Ce retard passe de 0° à 180° quand l'angle d'incidence croît de 0° à 90°.

36. Le même système de coordonnées représenté fig. 8 a été choisi dans la théorie de la réflexion magnétique [1]). Seulement, ce ne sont plus Oa' et Ob, mais Oa' et Ob' qui indiquent les directions positives des amplitudes [2]).

La théorie de la réflexion magnétique démontre que, étant donné deux rayons incidents de même phase et d'amplitude 1, polarisés l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, et dont les vibrations ont lieu dans les directions OY et Oa', il résultera du premier, par la réflexion [3])

un rayon vibrant dans le sens OY, représenté par $-B_s e^{i\Delta_1} P'_1$. (1)
» » » » » » Ob', » » $+C_a e^{i\Delta_4} P'_1$,

et du deuxième,

un rayon vibrant dans le sens Ob', représenté par $+B_p e^{i\Delta_2} P'_1$. (2)
» » » » » » OY, » » $-C_a e^{i\Delta_4} P'_1$.

Si l'on remplace Ob' par Ob, les signes de la deuxième expression en (1) et de la première en (2) se renversent. Nous changeons nous mêmes tous les signes des quatre expressions, afin de rendre un peu plus facile la comparaison de l'observation avec la théorie. L'inversion des signes peut être obtenue en changeant de 180° la phase des deux rayons incidents.

Si le sens des vibrations exécutées par ces deux rayons est donc OY et Oa, la phase étant la même et l'amplitude 1, le premier donne naissance

---

[1]) Van Loghem l.c. pages 18, 56.
[2]) Van Loghem, page 27.
[3]) Van Loghem, page 68.

à un rayon, représenté par $+ B_s e^{i\Delta_1} P_1'$, sens des vibrations OY,
» » » » » $+ C_a e^{i\Delta_4} P_1'$, » » » OB,
et le second,
à un rayon, » » $+ B_p e^{i\Delta_2} P_1'$, » » » OB,
» » » » » $+ C_a e^{i\Delta_4} P_1'$, » » » OY.

Ces résultats, comparés aux déterminations du § 2, démontrent que

$$f = B_s,\ h = B_p,\ \Phi = \Delta_2 - \Delta_1,$$

(les Δ représentent en effet les retards de phase), et que

$$\mu_i = C_a,\ \mu_p = + C_a,\ m_i = m_p = \Delta_4 - \Delta_1.$$

La théorie introduit, dans ses calculs, des quantités auxiliaires p et δ. Les équations de M. van Loghem, pag. 65, déterminent $p \cos \delta$ et $p \sin \delta$. On peut donc prendre positivement p_1, p_2, p_3, p_4, et par un choix judicieux du quadrant de δ, donner à $p \cos \delta$ et $p \sin \delta$ leur valeur exacte. D'après ces formules de la page 65, on a

$$p_1 \sin \delta_1 = p_2 \sin \delta_2 = p_3 \sin \delta_3 = p_4 \sin \delta_4 = \frac{\sigma \varrho}{\cos \alpha_1} \sin (\tau + \omega)$$

Comme il a été dit, les quantités $\sigma_1, \varrho_1, \sin (\tau + \omega)$ sont positives, de sorte que $\sin \delta_1$ doit être pris positivement. δ_1 est un angle situé dans le premier ou le deuxième quadrant.

37. Les formules, destinées à servir au calcul des diverses quantités, sont les suivantes [1])

$$\mu_i = \mu_p = \frac{\sigma^3 \sin \alpha_1}{\varrho\, p_1{}^2\, p_4 \cos^3 \alpha_1} \cdot \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1\, h N.$$

$$m_i = m_p = \Delta_4 - \Delta_1 = 3\tau - \omega - \frac{\pi}{2} - 2\delta_1 - \delta_4 - (\delta_2 - \delta_1).$$

Les quantités auxiliaires entrant dans ces formules sont déterminées par les équations [2])

$$tg\, \delta_1 = \frac{m \sin (\tau + \omega)}{1 + m \cos (\tau + \omega)},\quad tg\, \delta_2 = \frac{m \sin (\tau + \omega)}{-1 + m \cos (\tau + \omega)},$$

---

[1]) Van Loghem, page 67.

[2]) Van Loghem, l.c. pag. 66 et 65.

$$tg\,\delta_4 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{tg^2\,\alpha_1 + m \cos(\tau + \omega)}$$

$$p_1^{\,2} = 1 + m^2 + 2\,m \cos(\tau + \omega),$$

$$p_4^{\,2} = tg^4\,\alpha_1 + m^2 + 2\,tg^2\,\alpha_1\,m \cos(\tau + \omega),\; m = \frac{\sigma\,\varrho}{\cos\alpha_1}$$

α_1 est l'angle d'incidence; σ, ϱ, τ, ω sont des quantités auxiliaires employées dans la théorie de la réflexion métallique. [1])

J'ai calculé à l'aide de ces formules, sous différentes incidences pour le miroir II, et sous une seule incidence pour le miroir I, la valeur de μ et de m [2]). La valeur théorique de l'amplitude renferme le facteur $\frac{2\,\pi}{T}\,\varepsilon_1\,h\,N$, dans lequel h représente la constante de Hall pour le métal, N la force magnétique et ε_1 la constante de la polarisation diélectrique dans l'air. Ce facteur, que nous appellerons A, ne peut donc être donné par le fait que ε_1 apparaît dans les formules. De tous les facteurs de l'amplitude, $\frac{\sigma^3 \sin a_1}{\varrho\,p_1^{\,2} p_4 \cos^3 a_1}$ seul a été calculé. Les valeurs théoriques des amplitudes lui sont proportionnelles. Le tableau suivant renferme les résultats du calcul. Les valeurs observées de μ et m sont les moyennes de μ_i et μ_p, m_i et m_p. A l'incidence $\alpha_1 = 51°\,22'$, j'ai pris pour m la valeur de la phase, déduite des rotations à zéro. Je n'ai pas reproduit, comme trop incertaines, les valeurs observées des phases sous les trois incidences les plus petites.

---

[1]) Voir § 44.

[2]) Quoique M. van Loghem donne μ et m à différentes incidences, il était nécessaire de reprendre les calculs puisque cet auteur, faisant usage des valeurs données par Jamin pour l'incidence principale et l'azimut principal, a pris 16° 50′ pour cette dernière quantité au lieu de 28° 49′. Jamin donne 16° 50′ comme l'azimut principal après deux réflexions. Il n'est peut-être pas inutile de rendre attentif à cette circonstance, qui a déjà donné lieu à mainte méprise. Voir Eisenlohr. *Wied. Ann.* I; voir aussi *Wied. Ann.* 23, pag. 143 et 512 et Sissingh, l.c. page 110.

Aimantation équatoriale 1400 C. G. S. par unité de volume.

Miroir I $I = 77° 23'5$ $H = 26° 34'$ Lum. jaune.
„ II $I = 76° 30'5$ $H = 26° 44'$

Miroir.	Angle d'incid.	Amplit. de la compos. magnéto-opt. calculée	observée	$\frac{\text{Amplit. obs.}}{\text{Amplit. calc.}}$	Phase de la compos. magnéto-opt. calculée	observée	obs.—calc.
II	86°	0,226 × A	0,284 × 10^{-3}	1,26 × $\frac{10^{-3}}{A}$	−54°16′5	180°+29°26′	180°+83°42′5
II	82°30′	0,358 »	0,530 »	1,48 »	−62°22′	180°+24°22′	180°+86°44′
II	76°30′,5 (I)	0,493 »	0,715 »	1,45 »	−69°51′,5	180°+14°49′	180°+84°40′,5
II	71°52′	0,548 »	0,815 »	1,48 »	−73°44′,5	180°+10°3′	180°+83°47′,5
I	61°30′	0,598 »	0,820 »	1,37 »	−81°36′,5	180°+ 1°49′	180°+83°35′,5
II	51°22′	0,545 »	0,760 »	1,39 »	−85°55′	180°− 1°0′	180°+86°55′
II	36°10′	0,426 »	0,630 »	1.48 »	−90°1′,5	180°− 5°51′	180°+84°49′,5
II	24°16′,5	0,266 »	0,430 »	1,62 »	−91°56′		
II	12°	0,152 »	0,260 »	1,69 »	−93°2′,5		
II	6°	0,074 »	0,125 »	1,69 »	−93°1′,5		

Si l'on veut comparer les amplitudes observées avec celles que fournit la théorie, il faut encore faire attention au fait suivant. Dans le facteur $A = \frac{2\pi}{T} \varepsilon_1 \, h N$, la constante de Hall pour le fer, h, est positive, ce qui tient au choix du système de coordonnées [1]). N est positif, suivant la théorie de la réflexion équatoriale, quand, dans la fig. 7, les molécules dirigent leurs pôles nord vers la droite, vue du côté de l'axe positif des Y. L'aimantation est donc, en vertu du § 2, négative. Les valeurs de μ données par l'observation ont été reproduites ici pour l'aimantation positive, de sorte que les amplitudes calculées et observées auraient un signe différent de celui-ci. Mais on peut changer le signe de l'amplitude d'un faisceau lumineux, quand on augmente ou diminue sa phase de 180°. On peut donc rendre semblables les signes des amplitudes théoriques et expérimentales, en ajoutant ± 180° soit à la valeur calculée de la phase, soit aux différences dans la dernière colonne du tableau [2]). Ainsi sera indiqué la différence entre l'observation et la théorie.

[1]) Voir van Loghem, l.c., pag. 18.

[2]) Voir les remarques aux §§ 5 et 7, relatives aux déterminations du signe de μ a l'aide des expériences.

Comme, de cette théorie, on peut seulement déduire des quantités auxquelles l'amplitude de la composante magnéto-optique est proportionnelle, les valeurs données par le calcul pour ces amplitudes, et celles fournies par l'expérience concordent dans les limites des erreurs d'observation. La dernière colonne indique que les phases observées et calculées présentent une différence constante. Les variations sont en effet comprises dans les limites des erreurs. Il doit être réservé à la théorie de mettre en lumière la signification de ce résultat. Peut-être une telle différence de marche constante et de près de 90°, est-elle en rapport avec la différence de propriétés entre les courants électriques ordinaires et les mouvements d'électricité périodiques rapides de la théorie électromagnétique de la lumière, différence qui est attestée par une série de phénomènes.

D. *Comparaison avec les observations antérieures.*

38. M. Kerr découvrit le premier en 1878, à l'aide de moyens d'investigation très simples, le phénomène de la réflexion équatoriale, et en donna une description précise. Le premier pas à faire était de déterminer le signe des rotations au minimum aux diverses incidences. M. Kerr définit le signe des rotations de l'analyseur et celui de l'aimantation de la même manière que j'ai indiquée au § 2. En vertu de ce même paragraphe toutefois, les rotations positives du polariseur, d'après les conventions admises par M. Kerr, sont pour moi négatives et réciproquement. M. Kerr rapporte les signes des rotations, qui produisent le même effet qu'une aimantation de sens déterminé [1]). Ces signes sont opposés à ceux des rotations au minimum. Si l'on tient compte de ce fait, les résultats de M. Kerr sont les suivants:

Dans le cas d'aimantation positive, φ^m_{ia} est toujours négatif; φ^m_{pa} est positif pour $o < \alpha < I$, et négatif pour $I < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dans

[1]) Kerr. *Phil. Mag.* Ser. 5. vol. 5. pag. 176.

le cas d'aimantation positive, φ^m_{ip} est positif pour $o < \alpha < I$, négatif pour $I < \alpha < \frac{\pi}{2}$; φ^m_{pp} est toujours positif.

Comme M. Kerr compte seules les rotations du polariseur dans un sens différent du mien, il y a concordance entre les observations de M. Kerr et les miennes, puisque l'inversion des signes de φ^m_{ip} et φ^m_{pa} a lieu ici aussi à une incidence un peu plus grande que l'incidence principale (voir § 33). Suivant M. Kerr l'effet de l'aimantation est le plus fort au voisinage de 60°, ce qui est d'accord avec les valeurs de l'amplitude de la composante magnétique données au § 32. Elle atteint un minimum entre 60° et 70°. Il faut toutefois se rappeler qu'on ne peut conclure d'un maximum de rotation à un maximum d'amplitude. Les deux maxima n'ont pas plus lieu à la même incidence que ceux des différentes rotations.

Il est remarquable que M. Kerr mentionne déjà le déplacement de la raie obscure dans le champ de l'analyseur comme le caractère le plus saillant dont on puisse se servir dans l'observation du phénomène [1]).

Rien de bien important ne peut être déduit des expériences de M. Kerr pour ce qui concerne la phase de la composante magnétique. Il rapporte lui-même qu'à des incidences plus petites que l'incidence principale, la phase est plus rapprochée de 0° que de 90°, ce qui, d'après le § 32, est le cas pour une incidence quelconque, pourvu que la phase puisse être donnée avec quelque certitude. De $\alpha = I$ à $\alpha = 24$, pour laquelle incidence la phase est encore très exactement connue, celle-ci diffère de moins de 15°de 0° ou 180° (ce qui revient au même, si l'on ne tient pas compte du signe de l'amplitude).

39. M. Kundt [2]) découvrit en 1884 la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière qui a tra-

---

[1]) Kerr. *Philos. Mag.* Ser. 5, vol. 5, pag. 170 et ssv.

[2]) Kundt. *Wied. Ann.* Bd, 23.

versé des lames de fer, le cobalt et le nickel. Il fit connaître les rotations observées dans la réflexion équatoriale; ce sont des rotations au minimum de l'analyseur seulement, donc φ_{ia}^{m} et φ_{pa}^{m}. M. Kundt détermine les rotations positives de l'analyseur et l'aimantation positive de la manière que j'ai indiquée au § 2. Les signes des rotations de ce nicol, sont dans ses observations les mêmes que dans les miennes. Ses chiffres concordent aussi très bien avec les miens (§ 32), mais ils sont en général un peu plus grands. Un examen plus approfondi montre cependant qu'il y a des différences. D'après M. Kundt, φ_{ia}^{m} a la plus grande valeur; dans mes expériences, c'est φ_{pa}^{m} qui est le plus grand. Les rotations du polariseur n'ayant pas été observées, il n'y a pas moyen de calculer l'amplitude et la phase de la composante magnéto-optique, à moins d'employer les relations $\varphi_{ia}^{m} = \varphi_{pp}^{m}$, $\varphi_{pa}^{m} = \varphi_{ip}^{m}$. On trouve alors pour l'amplitude, à l'incidence $i = 39°5$ et à de plus petites incidences, des valeurs incontestablement trop élevées; un effet de la grande différence entre φ_{ia}^{m} et φ_{pa}^{m} (voir § 33).

40. Les recherches de M. Righi [1]) sur la réflexion équatoriale furent publiées en 1887 et donnèrent les rotations au minimum et à zéro pour un grand nombre d'incidences. Il n'en a déduit par le calcul ni les amplitudes ni les phases de la composante magnéto-optique. Cette lacune aurait pu être comblée en prenant des valeurs arbitraires pour les constantes optiques de son miroir; les formules du Chapitre II permettant alors de calculer les quantités en question. Mais on ne trouve pas, dans les recherches de M. Righi, la discussion de la méthode et la détermination de l'exactitude de ses résultats; et ces opérations sont indispensables. La première doit servir à démontrer les hypothèses dont on part dans le calcul de l'amplitude et de la phase de la composante magnéto-optique. Il faut ensuite montrer qu'il y a concordance entre les résultats des rotations au minimum et à zéro. Pour comparer

[1]) Righi. *Ann. de Chim. et de Phys.* Sér. 6, vol. 10.

enfin l'observation et la théorie, on doit pouvoir juger de l'exactitude des résultats Nous avons, en effet, reconnu que la précision assez grande de nos mesures est nécessaire pour établir les résultats auxquels nous sommes arrivé. Un moindre degré d'exactitude ne permettrait pas de tirer une conclusion des différences entre l'observation et le calcul. C'est pourquoi j'ai jugé plus important de faire mes expériences avec grand soin, que de les répéter sous un grand nombre d'incidences; et c'est aussi à ce point de vue que je me suis placé dans le choix de ces dernières.

41. Comme M. Righi ne calcule ni les amplitudes ni les phases, ce sont les rotations qui, de même que dans les travaux de M. Kerr et de M. Kundt, passent au premier plan. Aussi les changements de signe de ces quantités sont-ils observés avec soin. C'est ainsi que M. Righi arrive à parler de l'incidence singulière, et de l'incidence principale du fer aimanté. Ces deux angles n'ont pas de signification générale et sont d'ailleurs compris, comme cas particuliers, dans les formules. La discussion montre qu'il en est en effet ainsi (voir § 33). La méthode des rotations au minimum et à zéro assigne au contraire dans la descripton du phénomène le poids principal à l'amplitude la phase [1]).

L'incidence principale et l'azimut principal du miroir II étant pris pour celui du miroir de M. Righi, j'ai déduit de ses observations l'amplitude et la phase de la composante magnéto-optique. Les résultats de ce calcul sont reproduits, avec les rotations elles-mêmes, dans le tableau suivant, pages 244 et 245. Comme M. Righi détermine par la même méthode que M. Kerr les directions positives des rotations et

[1]) Il résulte aussi des observations de M. Righi, que $\varphi^m_{ip} = \varphi^m_{pa}$, $\varphi^m_{ia} = \varphi^m_{pp}$. Il est vrai que les signes de ces rotations ne sont pas les mêmes, mais cela résulte des conventions admises pour indiquer les rotations positives des nicols; il suffira de compter une des rotations dans un sens différent pour arriver à un autre résultat. Voyez Righi, *Ann. de Chim. et de Phys.*, Sér. 6, vol. 10, pag. 212.

du courant aimantant, j'ai changé les signes des rotations des polariseurs, afin de pouvoir appliquer aux observations les définitions du § 2. En effectuant les calculs on trouve que la concordance des resultats fournis par les rotations à zéro et au minimum laisse à désirer sous bien des incidences différentes; et qu'à de petites incidences, la précision n'est pas suffisante pour donner l'amplitude d'une manière tant soit peu certaine. On ne peut pas conclure, comme il a déjà été remarqué plus haut, à la concordance entre les amplitudes théoriques et celles fournies par l'observation. La différence des phases observées et calculées n'est pas non plus constante.

Lorsque, dans le tableau suivant, deux valeurs de μ et m sont indiquées pour une même incidence, les supérieures sont déduites des rotations au minimum, les inférieures des rotations à zéro. Le facteur A (voir § 37) a été laissé de côté dans le rapport entre les amplitudes observées et calculées.

Observations de M. Righi sur la réflexion équatoriale, soumis

égaux à ce

On a admis $I =$

Angle d'incid.	$2\varphi^{m}_{ip}$,	$2\varphi^{m}_{ia}$,	$2\varphi^{m}_{pp}$,	$2\varphi^{m}_{pa}$,	$2\varphi^{\circ}_{ip}$,	$2\varphi^{\circ}_{ia}$,	$2\varphi^{\circ}_{pp}$
85°	— 3	— 3	— 3	— 3			
82°					4,5	— 4,5	— 5,5
80°			— 6	— 1			
78°54′	0	— 6,7	— 6,3	0	5	— 6,5	— 6,5
75°			— 7	4,5			
70°	6,7	— 7,9	— 8	6,5			
65°			— 8	8,7	0	— 8,5	— 9
60°	11	— 9	— 9	11	— 2	— 9	— 8,7
55°			— 9	— 10,5			
50°	10	— 9	— 9	11	— 6	— 13	— 13
45°			— 8	9	— 5	— 11,5	— 11,
40°	7,9	— 6,7	— 7	8			
35°			— 7	+ 7,6			
30°	6,6	— 6,6	— 7	+ 7,6			
20°	4	— 5	— 5	+ 4			
10°	2,5	— 2,5	— 2,7	2,3			

u calcul en supposant l'incidence principale et l'azimut principal u miroir II.

30′ 5, $H = 26° 44'$.

$2\varphi^{\circ}_{pa}$,	$10^3 \mu_i$,	$10^3 \mu_p$,	m_i, 180° +	m_p,	μ obs./calc.	m obs.-calc.
	+ 0,48	+ 0,48	+ 29°26′	+ 29°26′	1,78	85°58′,5
4	0,31	+ 0,26	64°10′	67°30′	0,77	128°49′,5
		+ 0,87		17°2′	2,04	82°35′
4,5	0,95	+ 0,90	— 14°46′	14°46′	2,07	81°39′
	- 0,53	— 0,41	— 40°18′	— 48°22′	1,05	111°13′
		+ 0,96		10°22′	1,87	90°9′
	1,04	+ 1,05	— 2°36′	— 3°53′	1,90	75°48′,5
— 0,5		+ 1,03		— 4°10′	1,78	75°22′
	1,09	1,18	— 0°	— 1°19′,5	1,97	80°10′
— 1,3	1,13	1,13	— 1°33′	— 1°33′	1,90	83°37′
	1,17	1,18	— 5°24′	— 3°29′	1,97	86°33′
		1,11		— 7°18′	1,97	76°16′
— 6	2,81	2,58	— 67°20′	— 67°9′	5,08	9°8′,5
	2,00	2,00	— 10°38′	— 10°38′	3,70	75°45′
— 5		0,96		— 10°7′	1,91	77°48′
	0,91	1,00	— 8°24′	— 9°11′	1,90	79°7′,5
	0,78	0,81	+ 7°6′	— 1°14′	1,74	95°35′
		0,81		— 9°10′	1,96	81°0′,5
	0,90	1,01	— 34°19′	— 54°50′	2,63	51°3′,5
	2,64	2,64	— 77°57′	— 77°57′	10,3	
	0,34	3,00	— 37°43′	90° — 5°36′	2,47	

Observations de M. Righi sur la réflexion équatoriale, soumises au calcul en supposant l'incidence principale et l'azimut principal égaux à ceux du miroir II.

On a admis $I = 76° 30' 5$, $H = 26° 44'$.

Angle d'incid.	$2\varphi^m_{ip}$	$2\varphi^m_{ia}$	$2\varphi^m_{pp}$	$2\varphi^m_{pa}$	$2\varphi^\circ_{ip}$	$2\varphi^\circ_{ia}$	$2\varphi^\circ_{pp}$	$2\varphi^\circ_{pa}$	$10^3 \mu_i$	$10^3 \mu_p$	m_i 180° +	m_p	μ obs./calc.	m obs.-calc.
85°	— 3	— 3	— 3	— 3					+ 0,48	+ 0,48	+ 29°26′	+ 29°26′	1,78	85°58′,5
82°					4,5	— 4,5	— 5,5	4	0,31	+ 0,26	64°10′	67°30′	0,77	128°49′,5
80°			— 6	— 1						+ 0,87		17°2′	2,04	82°35′
78°54′	0	— 6,7	— 6,3	0	5	— 6,5	— 6,5	4,5	0,95	+ 0,90	— 14°46′	14°46′	2,07	81°39′
									0,53	— 0,41	— 40°18′	— 48°22′	1,05	111°13′
75°			— 7	4,5						+ 0,96		10°22′	1,87	90°9
70°	6,7	- 7,9	— 8	6,5					1,04	+ 1,05	— 2°36′	— 3°53′	1,90	75°48′,5
65°			— 8	8,7	0	— 8,5	— 9	— 0,5		+ 1,03		— 4°10′	1,78	75°22′
									1,09	1,18	— 0°	— 1°19′,5	1,97	80°10′
60°	11	— 9	— 9	11	— 2	— 9	— 8,7	— 1,3	1,13	1,13	— 1°33′	— 1°33′	1,90	83°37′
									1,17	1,18	— 5°24′	— 3°29′	1,97	86°33′
55°			— 9	— 10,5						1,11		— 7°18′	1,97	76°16′
50°	10	— 9	— 9	11	— 6	— 13	— 13	— 6	2,81	2,58	— 67°20′	— 67°9′	5,08	9°8′,5
									2,00	2,00	— 10°38′	— 10°38′	3,70	75°45′
45°			— 8	9	— 5	— 11,5	— 11,5	— 5		0,96		— 10°7′	1,91	77°48′
									0,91	1,00	— 8°24′	— 9°11′	1,90	79°7′,5
40°	7,9	— 6,7	— 7	8					0,78	0,81	+ 7°6′	— 1°14′	1,74	95°35′
35°			— 7	+ 7,6						0,81		— 9°10′	1,96	81°0′,5
30°	6,6	— 6,6	— 7	+ 7,6					0,90	1,01	— 34°19′	— 54°50′	2,63	51°3′,5
20°	4	— 5	— 5	+ 4					2,64	2,64	— 77°57′	— 77°57′	10,3	
10°	2,5	— 2,5	— 2,7	2,3					0,34	3,00	— 37°43′	90°—5°36′	2,47	

E. *Considérations relatives à l'explication du phénomène.*

42. M. Kundt[1]) a essayé de découvrir une analogie entre les phénomènes présentés par la réflexion, soit équatoriale, soit polaire, et ceux que produit la réflexion par la face postérieure d'une plaque de verre, placée dans un champ magnétique. L'auteur est parti sans aucun doute de cette idée, que dans le cas du fer, la réflexion ne se fait pas seulement par la surface mais aussi dans l'intérieur du métal où la lumière peut pénétrer [2]).

M. Kundt lui-même fit déjà voir que les rotations sont, pour la plaque de verre, de signe opposé à celles données par le fer; et M. Righi montra que les phénomènes ne concordent pas davantage au point de vue des valeurs des rotations à diverses incidences [3]).

M. Righi donne de la réflexion polaire une explication, qui cependant peut à peine prétendre à un autre titre que celui d'une description compliquée du phénomène. Il décompose le faisceau incident en deux faisceaux polarisés elliptiquement et en sens inverse; et chacun d'eux est supposé posséder, à la réflexion, une variation d'amplitude et de phase différente. On ne voit pas si cette décomposition est autre chose qu' un artifice d'analyse, et possède en effet une signification physique [4]). De même, il n'est pas clair pourquoi elle n'est pas applicable aussi à la réflexion équatoriale [5]). On aurait pu, comme dans la réflexion polaire, déduire des observations les valeurs des constantes.

---

[1]) Kundt. *Wied. Ann.* 23.

[2]) Cette pénétration de la lumière dans l'intérieur des substances a déjà été signalée à plusieurs reprises. Malheureusement, on n'est jamais arrivé à une représentation nette de ce que cette pénétration produit. Dans chaque théorie de la réflexion d'ailleurs on tient compte du fait en ce sens, que l'on reconnaît l'influence exercée sur les vibrations réfléchies par le mouvement de la lumière dans le métal.

[3]) Righi. *Ann. de Chim. et de Phys.* Sér. 6. vol. 10, pag. 213.

[4]) Righi. *Ann. de Chim. et de Phys.* Sér. 6. vol. 4, pag. 468.

[5]) Righi. *Ann. de Chim. et de Phys.* Sér. 6. vol. 4. pag. 508.

Les considérations que nous venons de mentionner devront faire place à la théoriede M. Lorentz, dès qu'on aura expliqué la différence constante entre les phases observées et calculées, fait dû peut-être à une circonstance dont il n'a pas été tenu compte.

Le théorie de M Fitzgerald[1]) ne peut guère être appliquée qu'à la réflexion par des milieux transparents.

J'ai tâché aussi, dans le cours de ces recherches, d'arriver à un plus grand degré de précision en appliquant la méthode des réflexions multiples. J'ai fait construire à cet effet un appareil spécial. Toutefois cette méthode n'offre certains avantages que dans des circonstances déterminées. Comme l'appareil aurait d'ailleurs dû subir des modifications considérables, si je voulais obtenir une grande précision, je n'ai pas poursuivi plus loin mes recherches dans cette voie.

43. Les résultats du présent travail permettent d'analyser exactement la réflexion équatoriale, tandis que la comparaison de l'observation et de la théorie nous donne le moyen de présenter les faits sous une forme bien simple. Afin de bien mettre ceci en evidence, je fais suivre ici un aperçu général des quantités constantes et des relations entre celles-ci et les quantités mesurées, qui déterminent complètement la réflexion métallique ordinaire et la réflexion par un métal magnétique.

---

[1]) *Philos. Transact.* vol. 171. Il est toutefois digne de remarque, que le rapport entre les amplitudes calculées et celles données par cette théorie, est lui aussi constant.

Réflexion métallique ordinaire.

Constantes de Jamin.

I = angle d'incidence principale.

H = Azimut principal.

Réflexion par un métal magnétique.

Constantes de la réflexion équatoriale ; aimantation 1400 unités *C.G.S.*; en lumière jaune $\Theta = 1{,}5 \times 10^{-3}$ [1]), $S = 85°$.

Quantités qui permettent d'analyser le phénomène.

Φ = différence de phase du faisceau polarisé dans le plan d'incidence, relativement au faisceau polarisé perpendiculairement à ce plan.

f = amplitude du faisceau réfléchi, polarisé dans le plan d'incidence.

h = amplitude du faisceau réfléchi, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence.

μ = amplitude de la composante magnéto-optique.

Δ = phase de la composante magnétique.

Formules de Cauchy pour la différence de phase et le rapport des amplitudes à l'incidence α.

$$tg\, \Phi = sin\,(\tau + \omega)\, tg \left\{ 2\, Bg\, tg \frac{sin^2 \alpha}{\sigma \varrho\, cos\, \alpha} \right\},$$

Formule de l'amplitude, d'après la théorie.

$$\mu_i = \frac{+ \sigma^3\, sin\, \alpha}{\varrho p_1{}^2 p_4 cos^3 \alpha} \Theta, \quad \mu_p = \frac{+ \sigma^3\, sin\, \alpha}{\varrho p_1{}^2 p_4 cos^3 \alpha} \Theta.$$

---

1) Ce Θ représente la moyenne des rapports entre les amplitudes calculées et observées. Voir § 37. On suppose que, dans le calcul de la valeur théorique de l'amplitude, le facteur A est laissé de côté. S représente la différence moyenne entre les valeurs observées et calculées de la phase.

$$\cos\left(2\,Bg\,tg\frac{h}{f}\right) = \cos(2 \times \text{azimut rétabli}) =$$

$$= \cos(\tau+\omega)\sin\left(2\,Bg\,tg\frac{\sin^2\alpha}{\sigma\,\varrho\cos\alpha}\right)$$

$$f^2 = tg\left(f_1 - \frac{\pi}{4}\right),\quad \cot g\, f_1 =$$

$$= \cos(\tau+\omega)\sin\left(2\,Bg\,tg\frac{\cos\alpha}{\varrho\,\sigma}\right)$$

$$h^2 = tg\left(h_1 - \frac{\pi}{4}\right),\quad \cot g\, h_1 =$$

$$= \cos(\tau+\omega)\sin\left(2\,Bg\,tg\frac{\sigma\cos\alpha}{\varrho}\right)$$

Quantités auxiliaires, déterminées par I, H.

σ, τ [1]).

Quantités auxiliaires, déterminées par I, H, α.

ϱ, ω [2]).

Quantités données par les mesures,

Φ, $\frac{h}{f} = tg.$ azimut rétabli.

Formule de la phase d'après l'observation

$$\Delta = \Delta_0 + S$$

$$\Delta_0 = 3\,\tau - \omega + \frac{\pi}{2} - 2\,\delta_1 - \delta_4 - (\delta_2 - \delta_1)$$ [3]).

Quantités auxiliaires, déterminées par I, H, α.

δ_1, δ_2, δ_4, p_1, p_4 [4]).

Quantités données par les mesures.

φ^m_{ip}, φ^m_{ia}, φ^m_{pp}, φ^m_{pa},

$\overset{\circ}{\varphi}_{ip}$, $\overset{\circ}{\varphi}_{ia}$, $\overset{\circ}{\varphi}_{pp}$, $\overset{\circ}{\varphi}_{pa}$,

Relations entre les φ observés, μ et Δ.

Formules (7), § 5; (10), § 7.

$$\Delta_0 = m_i + \pi = m_p + \pi.$$

Voir § 37.

1) Les formules, qui déterminent σ et τ, sont les suivantes:

$$2\,H = \tau + \omega_I,\ -\cos 2\,I = \frac{tg(\tau-\omega_I)}{tg(\tau+\omega_I)},\quad \sigma = tg\,I\sqrt{\frac{\cos 2\,H}{\cos(\tau-\omega_I)}}$$

2) ϱ et ω se déduisent comme suit de I, H et α.

$$\cot 2\,\omega = \frac{\sigma^2}{\sin^2\alpha\sin 2\,\tau} - \cot 2\,\tau,\quad \varrho^2\sin 2\,\omega = \frac{\sin^2\alpha\sin 2\,\tau}{\sigma^2}$$

3) La théorie donne pour la phase de la composante magnéto-optique :

$$3\,\tau - \omega - \frac{\pi}{2} - 2\,\delta_1 - \delta_4 - (\delta_2 - \delta_1).$$

4) $tg\,\delta_1 = \dfrac{m\,sin\,(\tau + \omega)}{1 + m\,cos(\tau + \omega)}$, $tg\,\delta_2 = \dfrac{m\,sin\,(\tau + \omega)}{-1 + m\,cos\,(\tau + \omega)}$

$$tg\,\delta_4 = \frac{m\,sin\,(\tau + \omega)}{tg^2\,\alpha + m\,cos\,(\tau + \omega)}$$

$$p_1^2 = 1 + m^2 + 2\,m\,cos\,(\tau + \omega)$$

$$p_4^2 = tg^4\,\alpha_1 + m^2 + 2\,m\,tg^2\,\alpha\,cos\,(\tau + \omega)$$

$$m = \frac{\sigma\,\varrho}{cos\,\alpha}$$

On a pris ici pour Δ_0 la phase théorique augmentée de π, parce que la différence entre l'observation et la théorie peut être indiquée maintenant d'une manière un peu plus simple. Les valeurs données dans ce cas, pour l'amplitude, par l'observation et la théorie sont non seulement proportionnelles entre elles, mais de plus de même signe, tandis que les retards de phase observés et calculés diffèrent toujours du même angle S. Voir § 37.

44. Comme ces observations font connaître la manière dont l'amplitude et la phase de la composante magnéto-optique dépendent de l'angle d'incidence, il reste encore à étudier plus en détail la dispersion assez considérable du phénomène. M. Righi en fit mention le premier, et je pus la constater à mon tour [1]). Il faudra surtout examiner jusqu'à quel point la dispersion de la réflexion métallique permettra de l'expliquer.

Comme la théorie de M. Lorentz admet ensuite un rapport

---

[1]) Les observations ont été faites en lumière blanche. Les rotations observées et les amplitudes et phases calculées de la composante magnéto-optique sont considérées s'appliquer à la lumière jaune. L'étude de la dispersion, que j'ai déjà commencée, permet de vérifier l'exactitude de cette hypothèse. Il est remarquable que jamais la raie obscure dans le champ de l'analyseur, que j'emploie toujours comme point de repère, ne montre trace de coloration.

simple entre l'amplitude et la phase de la composante magnéto-optique dans la réflexion équatoriale et polaire, ce fait peut à son tour être soumis à l'épreuve de l'observation. Ces deux points font le sujet d'un travail qui sera bientôt terminé.

45. Les présentes recherches, commencées en 1886, furent faites au Laboratoire de Physique de l'Université de Leyde. Je considère comme un agréable devoir de présenter mes sincères remercîments au Directeur du Laboratoire, M. le Professeur H. Kamerlingh Onnes, tant pour les nombreux moyens d'investigation dont il me permit de disposer, que pour son appui et ses conseils dans le cours de ces recherches. Depuis le commencement de 1889 les observations ont été faites en collaboration avec M. P. Zeeman, actuellement docteur en sciences physiques, qui m'a prêté une assistance assidue

---

MESURES RELATIVES AU PHÉNOMÈNE DE KERR,

DANS LA

RÉFLEXION POLAIRE SUR LE FER, LE COBALT ET LE NICKEL SE RAPPORTANT EN PARTICULIER À LA DIFFÉRENCE DE PHASE MAGNÉTO-OPTIQUE DE SISSINGH.

(Mémoire couronné par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem.)

PAR

P. ZEEMAN,

à Leyde.

Introduction.

Faraday avait découvert la rotation du plan de polarisation lors du passage de la lumière polarisée au travers de substances transparentes, à peine dia- ou para-magnétiques, et placées dans un champ magnétique. Verdet, poursuivant ces recherches, trouva qu'une solution concentrée de chlorure ferrique, qui présente un pouvoir magnétique faible, montre le même phénomène, mais dans un sens opposé à celui de la plupart des autres substances.

Kerr eut alors l'idée d'étendre cette étude aux corps fortement magnétiques et peu transparents. Malheureusement, un examen direct lui était interdit, vu l'impossibilité où il se trouvait d'obtenir les métaux en couches suffisamment minces. Ce ne fut qu'en 1884 que M. Kundt parvint à précipiter sur du verre platiné des couches propres à des recherches de cette nature, et à y démontrer la rotation du plan de polarisation. Toutefois, guidé sans doute par la considération que, dans les propriétés de la lumière réfléchie, se révèlent, en règle générale, celles de la lumière réfractée, Kerr put espérer déduire, des caractères de la lumière réfléchie par un aimant, les particularités de la propagation des rayons lumineux dans le métal aimanté. C'est ainsi, en effet, que déjà

en 1876, Kerr découvrit les phénomènes accompagnant la réflexion de la lumière polarisée par un aimant poli, et qu'il les décrivit spécialement dans les deux cas principaux de la réflexion équatoriale et polaire.

M. Lorentz a donné, en 1882, une théorie du phénomène de Kerr [1]), développée plus tard par M. van Loghem (§ 14), et à laquelle le phénomène de Hall, accompagnant les courants stationnaires, servit de point de départ [2]). La lumière incidente est-elle polarisée dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, le phénomène consiste dans l'apparition d'une composante, dont le plan de polarisation est perpendiculaire à celui de la lumière incidente. L'apparition de cette composante se trouve, suivant la théorie, en rapport avec ce fait, que dans un métal aimanté la lumière polarisée circulairement à droite et à gauche peut se propager avec une vitesse et un coëfficient d'absorption différents [3]). La théorie permet de calculer, pour une incidence quelconque, la phase et l'amplitude de la composante magnéto-optique. Les résultats de M. van Loghem se laissant contrôler par les déterminations de M. Kaz, relatives à la réflexion polaire, il était tout donné, au moment où M. Sissingh, sa disser-

[1]) M. Fitzgerald a déjà donné, antérieurement à cette époque, une théorie du même phénomène. Quoique cette théorie ne soit, à proprement parler, applicable qu'aux substances transparentes, ses formules définitives concernant l'amplitude concordent cependant, à un facteur près, avec les formules de M. van Loghem. On n'obtient pas, d'autre part, les formules définitives de M. Fitzgerald en rendant l'absorption nulle dans celles de M. van Loghem. La raison de cette différence mérite d'être étudiée de plus près.

[2]) Comp. Sissingh, *Verh. Kon. Akad.* Amsterdam 1890, et *Arch. néerl.* XXVII, 1893, § 34.

[3]) M. Drude rapporte (*Wied. Ann.* Bd. 46, p. 421) qu'il a cherché à constater une différence dans l'absorption de la lumière polarisée circulairement à droite et à gauche, différence qu'il déduit de ses équations, mais qu'il n'a pu découvrir, probablement à cause de défauts dans son miroir. L'existence nécessaire de ce phénomène magnéto-optique fut déjà affirmée par M. Lorentz (*Versl. en Med. Akad.*, Amsterdam, 1883, p. 238).

tation achevée, entreprit (1885) l'étude du phénomène de Kerr, d'examiner ce que donnerait la réflexion équatoriale.

M. Sissingh détermina donc l'amplitude et la phase dans la réflexion équatoriale sur le fer, et compara ses résultats avec les données théoriques. Ses recherches aboutirent à cette conclusion, qu'entre les phases observées et calculées, et dans des limites très-larges, il existe une différence sensiblement constante de 85° environ, donc bien différente de 90°. Cette différence de phase, qui joue un rôle important dans les recherches suivantes, relatives au phénomène de Kerr, sera désignée sous le nom de *différence de phase de Sissingh.* Il apparut aussi que les amplitudes, qui ne peuvent être comparées avec la théorie qu'à un facteur indéterminé près, furent trouvées d'accord avec celle-ci dans les limites des erreurs d'observation (1890). D'autres auteurs, qui entreprirent des mesures relatives au phénomène de Kerr dans la réflexion équatoriale, comme M. Righi, dont les recherches furent publiées avant que M. Sissingh n'eût terminé les siennes (1886), ne sont pas arrivés à démontrer l'existence de la différence de phase de Sissingh. Les mesures de ce dernier observateur permirent d'analyser, complètement, le phénomène de la réflexion équatoriale. Les seules données nécessaires étaient les deux constantes, dont il vient d'être question (la différence de phase de Sissingh et la constante des amplitudes), et la théorie de M. Lorentz. Une simplification importante fut ainsi obtenue [1]).

Il devait être réservé à des recherches ultérieures de décider, entre autres, jusqu'à quel point une observation plus minutieuse permettrait d'analyser de la même façon la réflexion polaire. Le plus important sans doute, en cette occurence, était de déterminer tout d'abord si, dans ce cas, il existerait encore une phase de Sissingh de même valeur. Les

[1]) Voir Sissingh l.c. § 1 et 43. Inversément, on peut dire que ces formules définissent la différence de phase de Sissingh comme une grandeur expérimentale.

observations que je fis sur le fer donnèrent, pour cette phase, une valeur de 80° environ. L'angle avait été choisi, dans cette détermination, de manière à pouvoir trancher encore une autre question. La théorie demande qu'il existe, dans les réflexions équatoriale et polaire, un rapport déterminé entre les amplitudes, l'angle restant le même. Les observations, pour lesquelles les déterminations de M. Dubois sur la proportionnalité de la rotation à l'aimantation vinrent fort à propos, semblèrent confirmer provisoirement ce rapport. Je ne poursuivis pas d'ailleurs jusqu'au bout ces recherches sur le fer, parce que, dans l'intervalle, la Société Hollandaise des Sciences mit au concours des recherches relatives à un autre métal.

Le présent travail comprend, en partie refondue, la réponse, couronnée par la Société, à la question de concours suivante [1]):

„Etudier par la voie experimentale, pour un métal autre que le fer, la modification que la magnétisation produit dans l'état de la lumière réfléchie."

J'ai joint à cette réponse les expériences faites en vue d'un contrôle détaillé de mes résultats [2]).

Je crus toutefois pouvoir interpréter librement la question, et je me proposai d'acquérir, en outre des résultats préliminaires précités, au moins une idée provisoire au sujet de la relation qui existerait entre la phase de Sissingh et la couleur de la lumière employée. Le résultat fourni par cette investigation fut confirmé plus tard par les mesures, bien plus certaines, faites sur le cobalt.

Le présent travail, qui ne s'occupe que de mesures polaires, traite principalement du cobalt, d'une manière moins étendue du nickel, et renferme aussi les résultats déjà cités, relatifs à la réflexion sur le fer. L'étude de la phase de Sissingh promettait de donner, ici encore, les résultats les plus

---

[1]) La réponse devait être délivrée avant le 1r janvier 1892.

[2]) Communication préliminaire des résultats obtenus dans les *Séances de l'Acad. Royale d'Amsterdam* des 20 juillet et 29 octobre 1892. Résumé succinct dans ma dissertation, Leyde 1893.

complets. La valeur de cette phase fut trouvée, pour le cobalt, égale à 50° environ, la valeur provisoire trouvée pour le nickel étant de 30°. Tandis que les constantes optiques ordinaires de ces métaux diffèrent remarquablement peu l'une de l'autre, il apparaît, dans la phase de Sissingh, une différence très-forte, où se trahissent peut-être les propriétés magnétiques particulières de ces éléments. Outre la détermination de sa valeur, il importait surtout de démontrer la constance de la phase de Sissingh. J'ai effectué, à cet effet, sur le cobalt des mesures détaillées, (mais après l'envoi au concours de mon mémoire), d'où il résulte que sans doute cette constance existe approximativement dans de très-larges limites.

J'ai examiné, par des mesures faites sur des rayons de lumière de longueurs d'onde différentes, si la phase de Sissingh est, pour le cobalt, constante aussi à ce point de vue. Il se montra toutefois, comme déjà les observations préliminaires sur le fer l'avaient fait prévoir, que cette phase a des valeurs différentes pour des lumières différemment colorées; qu'il existe par conséquent, à cet égard, une dispersion magnéto-optique. Les mesures de M. Righi touchant la dispersion des rotations avaient déjà rendu très probable que l'amplitude, pour des lumières de couleur différente, aurait une valeur différente; toutefois il est à remarquer que, par l'influence de la phase, les rotations de M. Righi ne sont pas tout à fait proportionelles aux amplitudes.

Après que mon mémoire eut été envoyé au concours, j'appris, par la bienveillance de M. le prof. Goldhammer à Kasan, qu'il avait réussi à indiquer, dans les équations différentielles, la modification exigée par la différence de phase de Sissingh, au cas où celle-ci est parfaitement constante. Ses formules définitives sont les mêmes que celles de M. le prof. Lorentz, abstraction faite de la phase constante de Sissingh, qui a été introduite dans les formules quoique le mécanisme de cette opération reste provisoirement inexpliqué.

Mais en dépit de ce que cet état persiste encore jusqu'à présent, la signification de la phase de Sissingh acquiert, grâce à la théorie de M. Goldhammer (§ 34), une importance d'autant plus grande. Cette phase n'apparaît que chez les substances opaques susceptibles d'aimantation, tandis que sa valeur est probablement déterminée aussi bien par les propriétés magnétiques de la substance que par ses propriétés optiques.

Il se pourrait que l'on arrive à déduire la phase de Sissingh des constantes optiques ordinaires du métal. Et en effet, très peu de temps après M. Goldhammer, M. Drude (§ 34) donna une théorie du phénomène de Kerr, où cela se trouve réalisé. M. Goldhammer (§ 34) fit toutefois remarquer que la théorie de M. Drude est en désaccord avec la valeur de la phase de Sissingh, provisoirement déterminée par moi pour le cobalt; qu'elle doit en conséquence être rejetée. (Voir §§ 34, 41 et un travail qui paraîtra prochainement.)

Il s'agissait dès lors de déterminer exactement la valeur de cette phase (§ 33). Celle que j'avais donnée dans mon mémoire de concours n'avait pu être déterminée avec toutes les précautions voulues. Le délai disponible ne permettait pas, en effet, d'effectuer des déterminations de phase tout à fait complètes, qui exigent chacune 350 lectures, et ne peuvent en outre se succéder immédiatement, à cause de l'échauffement de la bobine (§ 29).

J'ai ajouté ici les déterminations magnétiques qui faisaient défaut dans le mémoire de concours.

Le phénomène de Kerr n'a, que je sache, pu être découvert que chez les trois métaux fortement magnétiques, et non chez les autres éléments. Comme je croyais, pour différentes raisons, pouvoir néanmoins attendre une action chez le tellure [1]), l'argent [2]), le palladium ou le platine, j'examinai à dessein ces substances; mais en y mettant même le plus grand soin je n'en pus rien découvrir.

[1]) Le phénomène de Hall est 50 fois plus intense chez ce corps que chez le bismuth.

[2]) Lorentz, *Versl. en Meded. Kon. Akad.* Amsterdam. Reeks II. Deel 19.

CHAPITRE PREMIER.

Disposition générale de l'appareil et méthode d'observation.

§ 1. L'appareil décrit par M. Sissingh, et employé pour la réflexion équatoriale, put en grande partie servir à l'étude de la réflexion polaire. Je renvoie en conséquence à sa description [1]), et ne veux indiquer que les changements dans la construction et dans les appareils auxiliaires que l'examen de la réflexion polaire nécessita.

§ 2. *L'électro-aimant* (fig. I*a* et *b* Pl. IV). Les miroirs employés dans les mesures étaient soit des surfaces polies aux extrémités de barreaux des métaux à étudier, soit de petites plaques disposées devant les extrémités d'un noyau de fer. Les barreaux avaient environ 12 cm. de longueur et 5 mm. de diamètre (voir plus loin les matériaux constituants). Afin de pouvoir disposer facilement, au moyen du spectromètre, la surface réfléchissante sous un angle d'incidence approprié il faut que la bobine d'aimantation soit de construction suffisamment légère. L'emploi du spectromètre offrait déjà des avantages particuliers rien qu'en vue du mode de contrôle constamment employé par moi, et de l'étude de la variation des constantes optiques avec la longueur d'onde. Les barreaux ($A\,B$) constituent le noyau de l'électro-aimant, et sont fixés par une de leurs extrémités à un morceau de fer doux ($A\,C\,D\,E$), deux fois recourbé à angle droit, dont la partie placée en face du miroir sert à recevoir l'aimant secondaire $E\,F$, enveloppé lui aussi de fil. Cet aimant secondaire est pourvu en outre d'un pas de vis, permettant de le rapprocher ou de l'éloigner du miroir. Son

---

[1]) Sissingh, *Natuurk. Verh. d. Kon. Akad.*, Amsterdam. Deel XXVIII, p. 1, 1890; voir aussi *Wiedem. Ann.*, Bd. 42, p. 115, 1891, et *Arch. néerl.*, T. XXVII, 1893, p. 173.

extrémité est taillée en cône, conformément aux observations de M.M. Stefan[1]) et Ewing[2]). Les autres dimensions sont les suivantes:

$$D\,C = 21 \text{ cm.}$$
$$A\,C = 8 \text{ „}$$
$$A\,G = 1{,}1 \text{ „}$$
$$S\,R = 2{,}8 \text{ „}$$

Le courant fourni par une batterie d'accumulateurs était de 20 à 12 amp. Le poids de la bobine était de 4,8 K.G. seulement, la résistance de 1 ohm environ. Le fil de cuivre, appliqué sur la bobine en 23 couches de 53 tours de spire, avait 2 mm d'épaisseur[3]). Des spirales de cuivre ont encore été appliquées plus tard autour de $C\,D$ et de $E\,D$, comprenant dans chaque cas 7 couches, respectivement de 63 et de 12 tours de spire.

§ 3. *Le spectroscope.* J'ai fait usage, dans l'étude de la dispersion du phénomène et la détermination des constantes optiques, d'un spectre prismatique, formé par un spectroscope que je fis construire à cet effet par M. A. Hilger. Il m'était précieux, dans ces expériences, de pouvoir faire alterner sans peine la lumière blanche et colorée, sans déplacer soit la lampe électrique, soit le miroir de l'héliostat; sans non plus verser dans l'emploi de dispositifs de dimensions telles, qu'ils rendraient nécessaire un agrandissement du pilier existant. Le spectroscope à vision directe de M. Christie, construit par M. Hilger pour le laboratoire de physique de Leyde, mérite, pour cette raison, et par la position relative invariable

---

[1]) Stefan. *Wien. Sitz.ber.*, Bd. 97, Abth. IIa, 1888. *Wiedem. Ann.* Bd. 38, p. 440, 1889.

[2]) Ewing. *Magnetic Induction in Iron* etc., 1892, p. 141 etc.

[3]) Les dimensions de l'électro-aimant auraient pu être choisies d'une manière un peu plus avantageuse. M. Siertsema m'a communiqué que, d'après un calcul fait par lui, le noyau aurait dû avoir une épaisseur plus grande.

de la lunette et du collimateur, propres à ce spectroscope seul, une préférence toute spéciale.

Les autres détails du spectroscope „half-prism” se trouvent dans le mémoire de M. Christie[1]). Je fis naturellement usage du spectroscope dans la „diminishing position.”

L'oculaire, indiqué figure II Pl. V, a été enlevé du spectroscope, et remplacé par une lentille cylindrique à axe horizontal, appropriée aux exigences dioptriques du reste de l'appareil.

La figure II Pl. V permet de se représenter les dimensions du spectroscope, construit pour nos expériences par M Hilger. Les angles au sommet des prismes de flint et de crown sont respectivement de 49° et 110°; ils diffèrent légèrement de ceux de l'appareil de M. Christie, mais sont plus avantageux que ceux-ci. La courte distance focale et la grande ouverture des objectifs constituent également une différence. On a, pour le prisme de flint $\mu_A = 1{,}7595$, $\mu_H = 1{,}8411$, pour le prisme de crown $\mu'_A = 1{,}510$, $\mu'_H = 1{,}530$.

En réglant les largeurs de fente du spectroscope et du collimateur, il fut possible de régler la pureté de la lumière, qui doit varier dans les diverses parties de ces expériences. Quoique, dans notre spectroscope l'étendue relative des différentes parties du spectre soit plus favorable que dans les spectroscopes à prisme ordinaires, la dispersion de la partie violette y est encore trop forte. L'appareil dut être placé sur un système de deux glissières mobiles dans deux directions perpendiculaires l'une à l'autre. Ceci permet, un mouvement azimutal étant également possible, de placer le spectroscope sans difficulté dans la position exacte, tout en lui conservant la stabilité indispensable.

§ 4. *La détermination des petites rotations* se fit par une lecture au miroir. J'avais eu soin de rendre impossible tout mouvement du miroir analyseur durant les observations. Le mode de fixation consiste en ceci, que le miroir porte un

[1]) Christie. *Proc. R. S. Londen.* Vol. 26, pag. 8, 1878; et *Introduction to Greenwich Observations*, 1888, pag. 17.

cercle azimutal et un cercle des hauteurs, auxquels il peut être serré par des vis. (fig. 1). La détermination de la valeur de 1′ à l'échelle se fait d'ordinaire simplement en amenant au repère deux divisions successives des cercles adaptés à l'analyseur et au polariseur. Cela ne suffit toutefois pas complètement. Je m'affranchis, par des mesures directes et en déterminant les facteurs de réduction, d'erreurs de division dans l'échelle graduée au bord des nicols. Ces coefficients de réduction, qui donnent le rapport entre les rotations observées et les rotations vraies, ne diffèrent généralement pas beaucoup de l'unité. Je donne, comme exemple, quelques valeurs pour le polariseur:

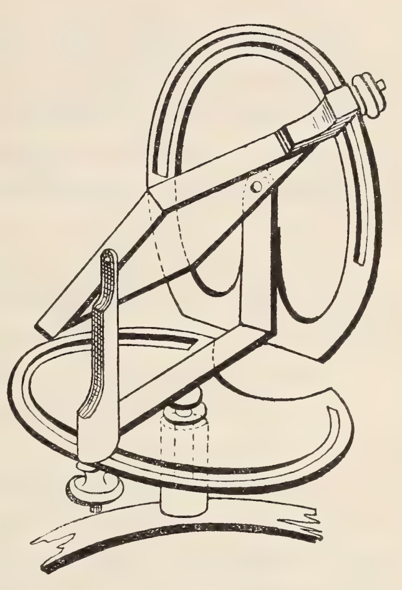


Fig. 1.

Lecture sur le cercle.	Coefficient.	Lecture sur le cercle.	Coefficient.
126—127	0,997	307—308	0,976
127—128	1,010	308—309	1,018
128—129	1,002	309—310	0,968.

Les petites rotations permettent de déterminer la phase et l'amplitude de la composante magnéto-optique suivant la méthode des rotations au minimum et celle des rotations à zéro. Kerr a employé la première; M. van der Waals a imaginé la seconde. Les formules qui servent, dans les deux cas, à déterminer les amplitudes et les phases, sont les suivantes, la notation suivie étant celle de M. Sissingh [1]),

[1]) Sissingh, *Akad.* p. 7 et 9; *Arch.*, p. 181 et 183.

et la lumière incidente polarisée dans le plan d'incidence [1]).

$$tg\, m_i = -\,cotg\, \Phi - \frac{1}{sin\, \Phi} \frac{h\, \psi^m_{ip}}{f\, \psi^m_{ia}},\, \mu_i = +\, \frac{f\, \psi^n_{ia}}{2\, cos\, m_i}$$

$$cotg\, m_i = -\,\frac{f\, \psi^\circ_{ia}}{h\, \psi^\circ_{ip}} \frac{1}{sin\, \Phi} + cotg\, \Phi,\, \mu_i = -\,\frac{h\, \psi^\circ_{ip}\, sin\, \Phi}{2\, sin\, m_i}.$$

§ 5. *Le spectroscope auxiliaire.* A côté de l'appareil principal se trouvait établi un spectroscope de Desaga; la lumière du faisceau employé pouvait être dirigée de ce côté à l'aide

---

[1]) Si la lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidénce, on a

$$tg\, m_p = -\,cotg\, \Phi - \frac{1}{sin\, \Phi} \frac{h\psi^m_{pa}}{f\psi^m_{pp}},\, \mu_p = +\, \frac{f\, \psi^m_{pp}}{2\, cos\, m_p}$$

$$cotg\, m_p = -\,\frac{f\, \psi^\circ_{pp}}{h\psi^\circ_{pa}} \frac{1}{sin\, \Phi} + cotg\, \Phi,\, \mu_p = -\,\frac{h\, \psi^\circ_{pa}\, sin\, \Phi}{2\, sin\, m_p}.$$

Dans ces formules m_i, m_p, μ_i, μ_p représentent respectivement les phases et les amplitudes quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à celui-ci;

ψ^m_{ia}, ψ^m_{ip} représentent les rotations au minimum de l'analyseur et du polariseur, quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence;

ψ^m_{pa}, ψ^m_{pp} ont la même signification, la lumière incidente étant polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

Les exposants ont la même signification pour les rotations à zéro ψ° (voir § 24). Afin de faciliter la comparaison de ce mémoire avec les travaux d'autres auteurs, je fais suivre ici un tableau comparatif des notations employées, abstraction faite du signe.

Arch. néerl. T. XXVII.	ψ°_{ia}	ψ°_{ip}	ψ°_{pa}	ψ°_{pp}	ψ^m_{ia}	ψ^m_{ip}	ψ^m_{pa}	ψ^m_{pp}
Zeeman. diss.	"	"	ψ°_{la}	ψ°_{lp}	"	"	ψ^m_{la}	ψ^m_{lp}
Sissingh. *Verh. Akad.* D.28,	"	"	"	"	"	"	"	"
" *Wied. Ann.* Bd. 42.	"	"	"	"	"	"	"	"
Drude. *Wied. Ann.* Bd. 96.	β	$\beta_\circ$	γ	$\gamma_\circ$	s_r	s_e	p_r	p_e
Righi. *Ann. de Chim. et de Phys*, (6) T. 4, 9.	2β	$2\beta_\circ$	2α	$2\alpha_\circ$	$2\omega_1'$	$2\omega_2'$	$2\omega_1$	$2\omega_2$.

d'un miroir [1]). Il était par là facile de contrôler et d'apprécier la constance et l'homogénéité de la lumière, employée dans la mesure des constantes optiques et les expériences de dispersion. On juge de l'homogénéité par ce fait, que la largeur du faisceau lumineux occupait 4 divisions de l'échelle dans la première de ces deux séries d'expériences, et 12 dans la seconde. La distance entre les raies α et γ de l'hydrogène est de 80 divisions.

§ 6. *Le spectromètre* a été modifié de telle manière, qu'il fût possible de déterminer les constantes optiques du miroir, tandis que celui-ci se trouvait dans la bobine d'aimantation.

§ 7. *Détermination de l'aimantation.* Je mesurai l'induction, à l'aide d'une spirale d'épreuve de Rowland, directement en face de la surface réfléchissante, la pièce polaire et le miroir se trouvant à des distances variables. Dans le circuit de la spirale d'épreuve se trouve intercalé un inducteur terrestre, qui permet d'exprimer directement l'induction en mesure absolue. On peut alors déduire des résultats de M.M. Rowland, Ewing, Dubois et autres auteurs l'aimantation correspondant à une position déterminée de l'aimant secondaire. Il importe cependant de remarquer que la surface de la spirale d'épreuve ne peut pas être très exactement déterminée par la mesure directe de ses dimensions et que je n'ai pas fait une détermination de cette surface par la méthode bien plus exacte de M. Kolhrausch. Ceci peut donner lieu à des erreurs de plusieurs centièmes dans les déterminations de l'intensité magnétique. Il semble en effet que ces déterminations ont donné une valeur trop grande (voir § 16). L'influence de variations de température produites par le courant d'aimantation n'entre pas ici en ligne de compte [2])

[1]) Lors des expériences définitives la lumière fut toujours étudiée après réflexion par le miroir examiné. On est ainsi parfaitement sûr que la longueur d'onde de la lumière employée aux mesures se trouve déterminée.

[2]) Ewing, *Magnetic Induction in Iron*, etc. pp. 160, 172.
Du Bois. *Wied. Ann.* Bd. 39. p. 34. 1890.

§ 8. *Source de lumière.* La plupart des mesures nécessitées par le présent travail ont été effectuées à la lumière électrique. J'ai fait surtout usage de la lumière d'une lampe électrique automatique (ce qu'on appelle lampe à courant principal) de Siemens, qui se montre extrêmement propre à ces expériences.

Toutes les autres lampes électriques que j'essayai furent reconnues plus ou moins impropres. L'emploi de cette lampe a donc été d'une grande importance pour la réussite des séries d'expériences suivantes. Le numéro du brevet est 5065.

Afin d'obtenir dans l'appareil une intensité de lumière aussi grande que possible, les charbons ont reçu une inclinaison de ± 20° sur la verticale, ce qui permet d'employer la partie interne, la plus lumineuse, du cratère.

Vu du centre optique de l'objectif du grand collimateur ($f = 49$ cm.), le cratère éclaire une surface de 4 mm. de longueur sur 3 mm. de large, si l'on se représente celle-ci placée à l'endroit occupé par la fente, et si le cratère est distant de la fente d'environ 15 cm.

Le plus grand avantage toutefois de cette lampe, c'est la hauteur constante conservée par le cratère durant la combustion. Des mouvements de celui-ci durant les orientations des nicols rendent ces opérations très-difficiles ou impossibles. Le charbon inférieur est fixé dans un tube, d'où un ressort à boudin tend à le chasser, et passe en haut par un anneau que son extrémité, s'effilant en pointe à la combustion, dépasse de quelques millimètres. Le charbon supérieur descend automatiquement à mesure que la combustion avance. Le courant nécessaire à la lampe (28 amp. sur 44 volts), était fourni par une batterie d'accumulateurs Un régulateur de résistance, avec ampère-mètre et contact-volt-mètre d'Ayrton et Perry se trouve à proximité de l'observateur, ce qui rend très facile le réglage de la combustion. La lampe se trouve fixée à une glissière et un établi mobiles. Le charbon supérieur a un diamètre de 23 mm, l'inférieur de 14 mm. La lampe se trouvait enveloppée des écrans nécessaires, afin de protéger

l'observateur contre la lumière directe. M. Langley a, lui aussi, comme je m'en aperçus dans la suite, fait usage, dans ses recherches sur les rayons infra-rouges, d'une lampe à charbons obliques. Si l'on compare la figure et la description de M. Langley avec les miennes, on sera certainement amené à la conclusion que la lampe employée par moi est plus avantageuse.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Étude de la réflexion polaire sur le fer.

§ 9. *Matériaux.* Des surfaces réfléchissantes furent obtenues, par polissage, sur des barreaux de fer doux de 5 mm. de diamètre. Les constantes optiques, caractérisant ces surfaces, sont réunies, pour la lumière D, dans le tableau suivant.

Signe distinctif du miroir.	Angle d'incidence principale.	Azimut principal.	Observations.
IV.	76°13′	27°39′	
IIII.	76°20′	27°40′	fer doux de Suède.
D.	76°19′	28°20′	"
H.	75°7′	28°20′.	

§ 10. *Mesures et résultats de l'auteur.* J'ai effectué, à l'incidence $i = 51°22'$, deux séries de mesures, l'une à la lumière D, l'autre à la lumière blanche. Mon intention, en déterminant ainsi les conditions de mes expériences, était d'une part de pouvoir effectuer, pour un même angle, des rotations au minimum aussi bien que des rotations à zéro, d'autre part de me donner l'occasion d'établir, pour un même angle, la comparaison avec les mesures équatoriales de M. Sissingh. Le calcul appliqué aux résultats montra que l'oxydation, pendant les mesures, diminuait beaucoup la signification des

séries d'expériences faites avec le miroir IV. Lorsque cette source d'erreurs eut été découverte, on a toujours pu l'éviter dans les recherches ultérieures et diminuer ainsi considérablement les chances de faire de la besogne inutile.

§ 10*. Comme exemple de la manière dont furent déterminées les rotations au minimum et à zéro, je donne ici les chiffres correspondant à une position déterminée des nicols. On pourra se faire en même temps une idée de l'exactitude des observations.

Les indices 1, 2 se rapportent à l'aimantation positive et négative du miroir. Les chiffres des deux premières colonnes ont été lus directement sur l'échelle. (§ 4). La troisième colonne contient les différences de ces nombres. Le sens des rotations des nicols étant interverti à chaque nouvelle lecture, les nombres doivent être combinés deux à deux, ce qui produit les données de la quatrième colonne.

Angle d'incidence $i = 51°22'$. *Lumière blanche.*

Rotations à zéro.

P_1	P_2	Diff.		A_1	A_2	Diff.	
279,8	249,8	30,0		534,5	622,1	87,6	
76,9	52,3	24,6	27,3	41,1	21,2	80,1	83,8
79,8	49,0	30,8		36,3	23,5	87,2	
77,3	51,3	26,0	28,4	42,1	19,9	77,8	82,5
78,2	50,0	28,2		40,1	20,8	80,7	
74,8	52,2	22,6	25,4	41,8	20,2	78,4	79,5
80,3	49,0	31,3		36,1	22,1	86,0	
75,5	50,3	25,2	28,2	44,3	20,2	75,9	80,9
			27,3 div. éch.				81,7 div. éch.

Rotations au minimum.

P_1	P_2	Diff.		A_1	A_2	Diff.	
241,8	270,4	28,6		556,1	613,4	57,3	
53,2	79,8	26,6	27,6	58,5	03,1	44,6	50,9
47,8	79,2	31,4		59,7	14,6	54,9	
53,5	73,0	19,5	25,4	61,8	05,8	44,0	49,4
45,3	76,5	31,2		63,1	07,1	44,0	
48,3	68,0	19,7	25,4	57,5	07,1	49,6	46,8
46,9	73,8	27,9		57,2	13,3	56,1	
47,0	76,3	29,3	28,6	58,2	08,2	44,0	50,0
47,8	77,2	29,4		61,5	05,5	50,0	
49,8	77,8	28,0	28,7	64,6	11,2	46,6	48,3
			27,1 div. éch.				49,1 div. éch.

Observations de réduction.

Polariseur.				Analyseur.			
38	204,9	**39**	286,3	**183**	597,3	**184**	509,1
	3,9		7,3		97,6		6,3
	3,8		5,3		95,7		10,2
	4,2		5,2		97,8		8,2
	204,2		286,0		597,1		508,5

60′ = 81,8 divisions de l'échelle. 60′ = 88,6 divisions de l'échelle.

On trouve

$\psi^{\circ}_{pp} = 27{,}3$ div. éch. $= +\,20{,}2'$. $\psi^{m}_{pa} = 49{,}1$ div. éch. $= +\,33{,}3'$

$\psi^{\circ}_{pa} = 81{,}7$ „ „ $= +\,55{,}1'$. $\psi^{m}_{pp} = 27{,}1$ „ „ $= -\,19{,}6'$.

L'influence de la déviation subie par la lumière à cause des nicols fut toujours éliminée de la manière indiquée par M. Bakhuyzen [1]), par combinaison de séries d'expériences, comme il avait été fait aussi dans les recherches de M. Sissingh [2]).

[1]) Van de Sande Bakhuyzen. *Poggend. Ann.* Bd. 145.

[2]) Sissingh. l.c. § 25 et § 27.

§ 11. J'établis ci-dessous un parallèle entre les résultats obtenus par la méthode des rotations à zéro et celle des rotations au minimum. Il se montre qu'une altération nuisible a eu lieu dans l'état de la surface réfléchissante.

Les résultats, exprimés en minutes, sont les suivants:

Réflexion polaire sur le fer. Miroir IV. (II).

$i = 51°22'$

Lumière D.				Lumière blanche.			
ψ°_{ip}	ψ°_{ia}	ψ°_{pp}	ψ°_{pa}	ψ°_{ip}	ψ°_{ia}	ψ°_{pp}	ψ°_{pa}
$-22{,}4$	$-7{,}2$	$+9{,}2^5$	$+27{,}0$	$-24{,}9^5$	$-8{,}6^5$	$+8{,}3^5$	$+25{,}4^5$
ψ^{m}_{ip}	ψ^{m}_{ia}	ψ^{m}_{pp}	ψ^{m}_{pa}	ψ^{m}_{ip}	ψ^{m}_{ia}	ψ^{m}_{pp}	ψ^{m}_{pa}
$-13{,}7$	$+7{,}4^5$	$-8{,}5^5$	$+15{,}7$	$-15{,}6$	$+7{,}9$	$-7{,}6$	$+14{,}8$.

Si l'on en déduit (§ 4) les phases, à l'aide des valeurs $I = 76°13'5''$, $H = 27°39'$, qui avaient été déterminées avant ces mesures, on trouve:

	Lumière D.	Lumière blanche.
de ψ°	$m_i = 38°48' + 180°$	$m_i = 40°26' + 180°$
	$m_p = 40°16' + 180°$	$m_p = 39°8' + 180°$
de ψ^{m}	$m_i = 50°18' + 180°$	$m_i = 55°41' + 180°$ (III)
	$m_p = 50°11' + 180°$	$m_p = 54°42' + 180°$.

Tandis que les valeurs des phases, m_i et m_p, sont bien concordantes dans les différentes séries, il n'en est pas de même des valeurs tirées des rotations au minimum et à zéro. Il est remarquable que si l'on soumet de la même manière au calcul les observations de M. Righi, on trouve, entre les résultats des deux méthodes, des écarts de même sens.

Si m_o représente la valeur de la phase tirée des rotations à zéro, m_m celle déduite des rotations au minimum, on a, suivant les observations de M. Righi:

Angle d'incidence.	m_m	m_o	$m_m - m_o$
44°18′	74°	26°	48°
56°56′	78°	32°	46°
68°6′	79°	48°	31°

Je reconnus, après plus ample examen, qu'il existe probablement des inexactitudes dans les constantes optiques servant aux calculs. Je déterminai en conséquence de nouveau les constantes optiques du miroir employé dans les observations précédentes, et trouvai

$$I = 70°30', \; H = 31°54' \; \ldots\ldots\ldots \; \text{(IV)}$$

pour la lumière D, valeurs qui diffèrent considérablement de celles trouvées avant les mesures:

$$I = 76°13'5'', \; H = 27°39'.$$

Si l'on emploie dans les calculs les valeurs moyennes des constantes optiques, on tire

Lumière D.	Lumière blanche.	
de $\psi^o m_i = 48°58' + 180°$	$m_i = 51°16' + 180°$	
$m_p = 50°53' + 180°$	$m_p = 49°34' + 180°$	(V)
de $\psi^m m_i = 45° \quad + 180°$	$m_i = 50°13' + 180°$	
$m_p = 44°53' + 100°$	$m_p = 49°16' + 180°$.	

La concordance est donc déjà plus satisfaisante.

§ 12. L'altération présentée par la surface du miroir peut uniquement être attribuée au dépôt d'une couche d'oxyde, dont la formation, comme le montra M. Löwenherz [1]) par la modification des couleurs superficielles, se trouve fortement favorisée par l'échauffement considérable de la bobine.

La température interne de celle-ci était, dans mes expériences, souvent assez élevée, parfois de 170°, de sorte que, le retour à la température normale étant de longue durée, les circonstances étaient très favorables à l'oxydation du miroir. J'ai pris soin, dans les observations ultérieures, que la température n'atteignît jamais une valeur aussi grande. On y parvient en abrégeant les séries d'expériences, et en

---

[1]) Löwenherz, *Zeitschrift f. Instrumentenkunde*. Bd. 9, pag. 316, 1889. Voir aussi Kundt, *Wied. Ann.* Bd. 23, p. 241, 1884 et Dubois, Bd. 39, p. 34, 1890.

n'abordant pas une nouvelle série avant que le miroir ne soit complètement refroidi. D'autres moyens, employés pour refroidir la bobine, ne m'ont été jusqu'ici d'aucune utilité. Peut-être emploiera-t-on avec succès un courant d'anhydride carbonique sec. C'est un moyen que je me propose d'essayer.

Je me suis constamment rendu compte de l'état de la surface réfléchissante, en déterminant les constantes optiques après chaque résultat définitif. Les mesures sur un miroir déterminé furent interrompues dès que les phénomènes d'oxydation commençaient à prendre une influence sensible. J'ai pour cette raison dû abandonner bientôt le miroir IIII, ensuite le miroir H, et ne conservai enfin que le miroir D, de beauté malheureusement assez médiocre. Comme la détermination des constantes optiques réclame un temps passablement long, et qu'au bout du compte un écart de quelques minutes ne peut nuire au résultat final, j'ai effectué des mesures au compensateur, sous un angle qui se rapproche de l'incidence principale. Des formules, déduites et employées par M. Drude [2]) lors de sa détermination des constantes optiques, permettent de calculer les valeurs de l'angle d'incidence principale et de l'azimut principal.

Les calculs d'une série déterminée furent effectués plus tard à l'aide des valeurs moyennes des constantes trouvées au commencement et à la fin de la série. Pour ne pas entrer dans de trop grands détails, je ne donnerai pas chaque fois ces valeurs.

Il est à peine besoin de dire que les mesures furent toujours faites de telle manière, qu'il n'y restât pas d'erreurs provenant de l'appareil [1]). Les résultats provisoires, outre ceux déjà obtenus plus haut, sont les suivants, les rotations étant données en minutes:

---

[2]) Drude, *Wied. Ann.* Bd. 39. p. 481, 1890.

[1]) Sissingh, *Dissertation*, p. 36 et suiv. 1885 et *Arch. néerl.* T. XX, p. 12 et suiv.

Miroir IIII. Lumière blanche. $i = 51°22'$. $m - 180°$

$\psi^{\circ}_{ip} = -45{,}9$ $\psi^{\circ}_{ia} = -20{,}4$ $\psi^{m}_{ip} = -24{,}4$ $\psi^{m}_{ia} = +13{,}2$ $49°45'$ (VI)

Miroir H. Lumière blanche. $i = 51°22'$.

$\psi^{\circ}_{pa} = +54{,}6$ $\psi^{\circ}_{pp} = -19{,}9$ $\psi^{m}_{pa} = +32{,}5$ $\psi^{m}_{pp} = -18{,}1$ $46°27'$ (VII)

Les observations faites sur le premier miroir méritent le plus de confiance. Le miroir H avait subi des altérations assez importantes durant les observations. Le résultat représente une valeur moyenne, déduite des rotations à zéro.

On ne s'écartera pas beaucoup de la vérité en admettant que $50° + 180°$ représente la valeur de la phase de la composante magnéto-optique, quand on a $i = 51°22'$. Les mesures ont toutes été faites à l'incidence $i = 51°22'$. Les raisons en ont été données au § 10.

Il était possible que dans les expériences de M. Sissingh sur la réflexion équatoriale, se fût produit aussi une oxydation des miroirs par lui employés. Il en résulterait quelque incertitude dans les résultats de ses recherches, car les constantes optiques n'ont été déterminées par lui qu'avant de commencer ses expériences [1]).

J'ai profité de l'occasion pour déterminer de nouveau les constantes de ses miroirs. Ceux-ci avaient été conservés, les recherches terminées, sous une cloche avec du chlorure de calcium.

Je trouvai

pour l'anneau I $I = 75°52'$, $H = 27°46'$
„ „ II $I = 75°10'$, $H = 28°56'$; (V^a^)

tandis que les valeurs trouvées auparavant [2]) étaient

pour l'anneau I $I = 77°23'5$ $H = 26°34'$.
„ „ II $I = 76°30'5$ $H = 26°44'$. (V^b^)

Ces modifications ne sont en tout cas pas grandes; elles ont probablement pris naissance en partie lorsque les recherches

[1]) Sissingh, *Verh. d Kon. Akad.* Amsterdam. Deel 28, p. 12, 1890. *Arch. néerl.* T. XXVII, 1893, p. 187.

[2]) Sissingh, *Akad.* p. 12; *Arch. néerl.* p 187.

étaient déjà terminées. La forme annulaire des électro-aimants employés dans la réflexion équatoriale fait que le refroidissement est bien plus facile qu'avec notre électro-aimant (§ 2).

Le miroir de M. Righi (§ 11) semble, lui aussi, avoir été oxydé, en dépit de ce que, avec le mode de fixation du miroir employé par cet auteur, l'échauffement pendant les expériences fût moins facile. M. Righi fit usage „d'un miroir d'acier d'un galvanomètre à réflexion [1])”.

§ 13. *Dispersion magnéto-optique chez le fer.* Il était sans nul doute nécessaire qu'une étude générale sur le fer, dont la dispersion des rotations est connue grâce aux observations de M. Righi [2]), préludât aux recherches plus détaillées sur le nickel et le cobalt, demandées par la question de concours. Je n'ai pu trouver l'occasion de déterminer des valeurs définitives pour le fer. J'ai effectué des rotations à zéro, i étant égal à 51°22′, pour 3 couleurs du spectre, et j'ai déterminé les constantes optiques pour ces mêmes couleurs. Les valeurs trouvées pour ces constantes, quand il s'agit de lumière de longueurs d'onde λ_1, λ_2, λ_3, sont les suivantes:

Couleur.	Angle d'incidence principale.	Azimut principal.
$\lambda_1 = 0{,}618\,\mu$	76°55′	27°57′.
$\lambda_2 = 0{,}590\,\mu$	76°20′	28°20′ (VIII)
$\lambda_3 = 0{,}460\,\mu$	74°22′	30°15′.

Mieux aurait valu choisir les couleurs d'une manière quelque peu différente, de sorte que λ_2 fut convenablement éloignée des deux autres longueurs d'onde. C'est aussi ce que j'ai fait plus tard (§ 18). Les résultats furent les suivants:

Couleur.	ψ°_{pp}	ψ'°_{pa}	$m - 180$
λ_1	+ 16,7	+ 46,7	39° 8′
λ_2	+ 15,5	+ 46,6	39°49′ (IX)
λ_3	+ 12,7	+ 31,7	53°10′.

---

[1]) Righi, *Ann. de Chim. et de Phys.* (6) T. 4, p. 437, 1885.

[2]) Righi, *ibid*, T. 9, p. 136, 1886.

De ceci résulte, pour la phase, du bleu au rouge, une dispersion d'environ 14°.

Le trait visible dans le champ de la lunette était, dans ces expériences, nettement délimité, et l'avantage d'opérer avec une lumière homogène se faisait parfaitement sentir. Quand on emploie la lumière blanche, les bords colorés, présentés par le trait dans la réflexion polaire sur le fer, gênent pour l'orientation exacte. Il sont bien moins gênants avec le cobalt, où la dispersion se fait moins fortement sentir (voir § 28).

§ 14. *Comparaison des résultats obtenus avec la théorie.* (Voir l'introduction et § 34). Quand on veut établir une comparaison entre la théorie et l'observation, la meilleure manière de s'y prendre, c'est de déduire l'amplitude et la phase à la fois des observations et de la théorie. C'est pourquoi j'ai calculé, dans ce qui va suivre, la phase et l'amplitude, pour les miroirs étudiés, à l'aide des formules déduites par M. van Loghem [1]) de la théorie de M. Lorentz [2]) (Voir l'introduction). On a ainsi d'emblée sous les yeux les éléments qui déterminent complètement la composante magnéto-optique. Le calcul des rotations en partant de la théorie, tel qu'il a été effectué par M. Drude [3]), rend les erreurs des observations moins apparentes. Il devient de plus difficile de juger s'il y a concordance ou non entre les résultats des rotations à zéro et au minimum. C'est ainsi qu'avec le mode de calcul suivi par M. Drude on peut moins facilement retrouver ce que j'ai dit, par exemple, touchant les observations de M. Righi § 11 et § 12.

C'est ici le lieu de signaler que je n'ai pu constater, lors de l'aimantation, à l'aide du compensateur de Babinet, un changement quelconque dans l'angle d'incidence principale et

---

[1]) Van Loghem, *Dissertation*, 1883.

[2]) Lorentz, *Versl. en Med. Kon. Acad.* Amsterdam (II).Deel 19. *Arch. neerl.* 19.

[3]) Drude, *Wiedem. Ann.* Bd. 46, p. 403, 1892 et Bd. 48, p. 124, 1893. Voir aussi un mémoire, qui paraîtra prochamement.

l'azimut principal. Ceci est d'ailleurs conforme à la théorie [1]). Je mentionnerai, à ce propos, que M. Shea [2]) démontra dans ces derniers temps l'invariabilité de l'indice de réfraction du fer, du cobalt et du nickel, quand le champ magnétique varie de 2000—12000 unités C. G. S.

Les formules (voir § 14) servant à calculer la phase et l'amplitude [3]), sont les suivantes:

$$\mu_p = -\mu_i = \frac{\sigma^4}{p_1^2 p_4 \cos^3\alpha}\ A;\ A = \frac{2\pi}{T}\varepsilon_1\, h\, N$$

et

$$m_i = m_p = \Delta_3 - \Delta_1 = 4\tau - \frac{\pi}{2} - 2\delta_1 - \delta_4 - (\delta_2 - \delta_1).$$

Les grandeurs auxiliaires intervenant dans ces formules sont déterminées par les équations:

$$tang\ \delta_1 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{1 + m \cos(\tau + \omega)},\ tang\ \delta_2 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{-1 + m \cos(\tau + \omega)},$$

$$tang\ \delta_4 = \frac{m \sin(\tau + \omega)}{tang^2\alpha + m \cos(\tau + \omega)},$$

$$p_1^2 = 1 + m^2 + 2\, m \cos(\tau + \omega),$$

$$p_4^2 = tang^4\alpha + m^2 + 2m\, tang^2\alpha \cos(\tau + \omega),$$

$$m = \frac{\sigma\varrho}{\cos\alpha},$$

où α représente l'angle d'incidence, et σ, ϱ, τ, ω sont les grandeurs auxiliaires employées dans la théorie ordinaire de la réflexion métallique.

Les observations du § 12 ont été soumises au calcul à l'aide des constantes optiques appropriées (§ 12). Je n'ai pas perdu de vue, à cette occasion, que les rotations à zéro mettent le moins en relief, pour la détermination de la phase sous cet angle, l'influence des erreurs d'observations sur le résultat. Voici ce qu'on obtient:

---

[1]) Van Loghem. *Dissertation*, pp. 54 et 60.

[2]) Shea. *Wied. Ann.*, Bd. 47, p. 184, 1892.

[3]) Van Loghem. *l. c.* p. 67.

$i = 51°22'$ miroir.	Résultat du calcul pour $m - 180°$.	Résultat de l'observation pour $m - 180°$.	S.	
IIII	— 31°2′	49°45′	80°47′	
H	— 29°13′	46°27′	75°40′	(X)
IV	— 30°10′	50°20′	80°30′.	

La mesure faite sur le miroir *H* mérite le moins de confiance. *S* donne la différence entre la phase observée et la phase calculée, c'est à dire ce que j'ai nommé la différence de phase de Sissingh (voir l'Introduction). Dans la réflexion équatoriale cette quantité fut trouvée égale à 85° environ. Si l'on songe aux sources d'erreurs possibles, et combien les déterminations sont encore incomplétes, on se trouve bien en droit de conclure provisoirement que la différence de phase de Sissingh est la même dans les réflexions équatoriale et polaire.

§ 15. Les mesures effectuées sur le miroir D (§ 13) permettent de juger jusqu'à quel point la dispersion des constantes optiques suffit à expliquer la dispersion dans la phase.

Miroir en fer; $i = 51°22'$.

Couleur.	$m - 180°$ observé.	calculé.	S	
λ_1	— 29°58′	39°8′	69°6′	(XI)
λ_3	— 24°58′	53°10′	78°8′.	

Ceci indique donc que pour des lumières de couleur différente, *S* a des valeurs différentes; qu'il existe par conséquent une *dispersion de phase magnéto-optique* (voir à ce propos le cobalt § 33).

§ 16. Il faut, d'après la théorie, qu'il existe un rapport déterminé entre les amplitudes, l'angle restant le même, quand la réflexion a lieu sur un miroir polarisé tantôt équatorialement, tantôt polairement. Le rapport des amplitudes donné par la théorie [1]) est le suivant:

---

[1]) Van Loghem, *l. c.*, p. 61.

$$\mu_{aeq.} = \mu_{pol.} \times tang.\ \alpha_0$$

et dans ce rapport

$$tang\ \alpha_0 = \frac{\sin \alpha_1}{\sigma \varrho} e^{-i(\tau + \omega)},$$

α_1 est ici l'angle d'incidence.

Les observations faites sur le miroir H (§ 9) i étant de 51°22′, donnent, comparées aux mesures équatoriales, sous le même angle, de M. Sissingh [1]):

$$\frac{\mu \text{ Sissingh } aequ.\ 51°22'}{\mu \text{ Zeeman } pol.\ 51°22'} = 0{,}294 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(XII)}$$

Si l'on considère en outre que, dans les mesures de M. Sissingh, l'aimantation était de 1400 unités C. G. S, et en comprenait 850 dans les miennes, il vient, posant μ proportionnel à l'aimantation :

$$\frac{\mu_{aeq.}}{\mu_{pol.}} = 0{,}179 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(XIII)}$$

Quand on adopte les constantes optiques du miroir de M. Sissingh, la théorie donne

$$\frac{\mu_{aeq.}}{\mu_{pol.}} = 0{,}194.$$

Ce degré de concordance est satisfaisant, vu les circonstances dans lesquelles les observations ont été faites.

Une étude plus complète de cette concordance, étude qui est d'ailleurs déjà en partie préparée, sera toutefois nécessaire. Si l'on compare en effet les mesures, relatives à la réflexion polaire normale, faites par M. Dubois [2]), qui mit beaucoup de soin à déterminer l'aimantation, aux mesures de M. Sissingh et aux miennes propres, l'accord avec la théorie ne s'obtient qu'à une condition : il faut admettre que les valeurs trouvées dans ces deux derniers groupes sont trop élevées d'une quantité assez considérable. On ne pourra toutefois acquérir pleine

---

[1]) Sissingh, *Akad.*, pag. 38; *Arch.* p. 219 vgg.
[2]) Du Bois. *Wied. Ann.*, Bd. 39, p. 34, 1890.

certitude sur ce point qu'après que la phase de Sissingh aura été également déterminée dans la réflexion normale (voir § 33, en note).

§ 17. *Résultats des observations antérieures.* M. Kerr [1]) n'a pas fait lui-même d'observations relatives à la réflexion polaire, d'où l'on pût tirer une détermination numérique de la phase. Le fait en question a été plus spécialement étudié, par voie expérimentale, par MM. Kaz [2]), Kundt [3]), Righi [4]) et Dubois [5]). MM. Kundt et Dubois donnent les rotations dans la réflexion polaire normale seulement, et non pour d'autres angles d'incidence. La phase ne peut être déduite de leurs déterminations (voir pour l'amplitude le précédent §).

Les observations de MM. Kaz et Righi peuvent servir à une détermination des phases. M. Sissingh a soumis au calcul les observations de ces deux auteurs; M. Goldhammer [6]) celles du premier. Il faut toutefois que l'on admette alors pour les constantes optiques des valeurs arbitraires, puisqu'aucun des deux observateurs n'en dit quelque chose. La concordance entre les rotations au minimum et à zéro est, dans ces conditions, possible chez M. Kaz, tandis que chez M. Righi elle laisse beaucoup à désirer.

Si l'on emploie les notations du § 4, les résultats sont les suivants:

---

[1]) Kerr. *Phil. Mag.* (5), vol. 3, 1877, p. 321.

[2]) Kaz. *Dissertation*, Amsterdam, 1884.

[3]) Kundt. *Wied. Ann.* Bd. 23, p. 241, 1884 et Bd. 27, p. 59, 1885.

[4]) Righi. *Ann. de Chim. et de Phys* (6), T. 4, p. 437, 1885, et T. 9, p. 136, 1886.

[5]) Du Bois. *Wied. Ann.*, Bd. 39, p. 34, p. 1890.

[6]) Goldhammer. *Wied. Ann.* Bd. 46, p. 91, 1892.

I.

Calcul des observations de M. Kaz relatives à la réflexion polaire; la valeur de l'angle d'incidence principale étant $I = 76°30'5$, *celle de l'azimut principal* $H = 26°44'$.

Angle d'incid.	ψ°_{ip}	ψ°_{ia}	ψ^{m}_{ip}	ψ^{m}_{ia}	$10^3 \mu_i$	m_i	$\frac{\mu \text{ observé}}{\mu \text{ calculé}}$	*m observé — m calulé*
84°	— 16,7	8			0,122	180° + — 0°27′		3°32′
80°	— 13	10,5	— 15	9,5	0,797	+ 51°23′	4,54	62°53′
					1,526	+ 52°21′	8,66	64°14′
68°	— 28	2,75	— 30	14,5	1,747	+ 46°21′	0,70	70°30′
					1,769	+ 35°43′	0,71	59°52′
60°	— 40	— 3	— 40	17,25	2,74	+ 43°28′	1,02	71°10′
					3,47	51°25′	1,30	78°7′

(XIIIa).

II.

Calcul des observations de M. Righi sur la réflexion polaire; l'angle d'incidence principale étant $I = 76°30'5$, *l'azimut principal* $H = 26°44'$,

Angle d'incid.	ψ°_{ip}	ψ°_{ia}	ψ°_{pp}	ψ°_{pa}	ψ^{m}_{pp}	ψ^{m}_{pa}	$10^3\mu_i$	$10^3\mu_p$	m_i	m_p	μ obs. / μ calc.	m obs. $- m$ calc.
										180° +		
6°					— 33′	33′		— 4,53		—37°59′	1,55	+ 3°23′
15°30′					— 32,4	33		— 4,79		—42°19′	1,63	—1°29′5
22°10′					— 31,2	33,5		— 3,77		—23°52′5	1,28	62°57′5
36°26′					— 30	36		— 7,37		—55°58′	2,54	—18°28′
44°18′	—56′,8	—19′,8	+19′,8	57′,2	— 28,8	45		—12,5		+74°18′	4,3	109°43′
							— 3,28	— 3,32	26°22′	26°15′	1,14	61°43′5 (XIII*b*).
56°56′	— 56,9	— 10	10,4	57,1	— 28,8	45		—16,5		77°32′	6,0	108°11′
							— 4,52	— 4,53	32°13′	32°21′	1,64	62°57′
68°6′	— 45,2	2,9	— 3,1	44,8	— 19,2	51		—14,4		79°59′	5,75	113°7′
							— 3,56	— 3,57	48°19′	48°41′	1,44	81°54′
76°34′	— 36	7,3	— 7,1	36	— 12	45		— 3,49		61°65′	1,70	76°15′
							— 2,66	— 2,65	67°53′	68°25′	1,00	84°32′
84°50′	19,6	13	— 13,4	20	— 6	15		— 3,82		77°9′	3,4	80°29′
							— 1,10	— 1,12	72°56′	72°1′	1,0	75°48′
87°10′					— 1,5	6		— 2,25		84°31′	3,3	82°24′

On ne peut déduire de ces observations des résultats relatifs à la constance de la phase de Sissingh. Il est encore bien moins possible de déduire de la dispersion des rotations, mesurée par M. Righi, la dispersion de phase et d'amplitude, puisque des données sur la longueur d'onde de la lumière employée font défaut, et qu'il n'y a donc plus moyen de donner des valeurs un peu précises aux constantes optiques. Le calcul des observations de M. Kaz apprend que, si l'on s'en tient aux résultats des mesures pour 80°, 68° et 60°, qui sont les plus précis, il existe entre l'observation et la théorie une différence de 68°. On déduit des observations de M. Righi, pour 6 angles compris entre 44° 18' et 87°, une différence de phase de 75°.

CHAPITRE TROISIÈME.

Etude de la réflexion polaire sur le cobalt.

§ 18. *Matériaux.* J'ai employé des miroirs de cobalt de trois formes différentes. En premier lieu une couche réfléchissante déposée par voie électrolytique. Le bain se composait d'une solution concentrée de sulfate de cobalt, additionnée d'acide citrique et d'ammoniaque, de sorte qu'il persistait encore une faible réaction acide. Les valeurs les plus convenables, pour la tension et l'intensité du courant, furent déterminées par des expériences répétées. La couche réfléchissante fut précipitée sur le verre platiné de Kundt que l'on connaît (et que je reçus de Berlin par une intervention grâcieuse), employé comme cathode. J'en fis confectionner des plaques de 2 × 2 cM. et ½ mM. d'épaisseur. L'anode était en platine.

Les plaques furent disposées directement en face du noyau de fer, et maintenues par un anneau Ces plaques ont un

double avantage. Comme elles sont isolées, il n'y a pas de danger que la température y atteigne une très-grande valeur, alors même qu'elle est très-considérable dans le noyau de fer. En enlevant la plaque, on se trouve en état de mesurer la force magnétique à l'endroit primitivement occupé par elle; et celle-ci est égale, comme on le reconnaît sans peine, à l'induction magnétique dans la plaque. Malheureusement, les valeurs des constantes optiques démontrent que la surface n'était pas constituée par du métal pur. Les meilleurs miroirs de cobalt me furent fournis par les cubes que Trommsdorff met en vente comme cobalt pur. J'y fis tailler des surfaces polies et employai les miroirs ainsi obtenus, tantôt sous forme de barreaux de 10 mm. de longueur environ et 5 mm. de diamètre, tantôt sous forme de petits disques de 1 mm. d'épaisseur, après les avoir soudés au noyau de fer de l'électro-aimant. Il fut nécessaire de faire confectionner différents exemplaires de chaque espèce, et de choisir le plus convenable d'entre-eux, car les miroirs se montrèrent souvent déformés et oxydés. J'ai déterminé, à l'aide du compensateur de Babinet, les constantes optiques des miroirs employés; en repérant sous une même incidence déterminée. On peut ensuite trouver par le calcul (voir § 12), à l'aide de la phase et de l'azimut observés sous cet angle, les constantes optiques I et H.

Je n'ai pas essayé jusqu'à présent de confectionner des miroirs suivant la méthode de Wright, par pulvérisation d'une cathode, parce que M. Kundt [1]) a trouvé que cette méthode donne le plus souvent des miroirs biréfringents. Ceci créera aussi, sans nul doute, des difficultés dans des expériences sur la réflexion.

§ 18*. Les résultats fournis par le miroir de cobalt, précipité par voie électrolytique, sont les suivants pour 3 couleurs, données par les longueurs d'onde λ_1, λ_2 et λ_3 (voir § 13):

---

[1]) Kundt. *Wied. Ann.* Bd. 27. p. 59. 1886.

Miroir de cobalt précipité par voie électrolytique.

$\lambda_1 = 0{,}618\,\mu$, $I = 73°47'$, $H = 31°4'$,
$\lambda_2 = 0{,}540\,\mu$, $I = 72°34'$, $H = 31°56'$ (XIV),
$\lambda_3 = 0{,}460\,\mu$, $I = 71°1'$, $H = 31°49'$.

La valeur de l'angle d'incidence principale est beaucoup plus petite que celle généralement trouvée; des mesures faites sur ce miroir peuvent donc uniquement servir d'orientation. On ne peut guère attendre non plus que les méthodes des rotations au minimum et à zéro donneront les mêmes résultats (voir § 11 et § 25).

Miroir massif de cobalt.

$\lambda_1 = 0{,}618\,\mu$, $I = 76°33'$, $H = 30°49'$,
$\lambda_2 = 0{,}540\,\mu$, $I = 75°20'$, $H = 31°23'$, (XV)
$\lambda_3 = 0{,}460\,\mu$, $I = 73°44'$, $H = 31°27'$.

Les déterminations de M. Quincke [1]) sont parfaitement d'accord avec ces chiffres. Celles de M. Drude [2]) donnent, pour la lumière D:

$$I = 78°5', \qquad H = 31°40'.$$

M. Drude a toutefois complètement nettoyé la surface de cobalt dont il fit usage avec du papier à l'émeri 0000. Je me suis assuré qu'un traitement analogue, appliqué au cobalt étudié par moi, donne aux constantes des valeurs plus rapprochées de celles rapportées par M. Drude. Malheureusement la surface réfléchissante n'est alors plus assez parfaite pour y effectuer les rotations à zéro et au minimum.

§ 20. Un petit miroir, taillé dans les mêmes cubes, mais employé comme disque, avait les constantes suivantes pour des rayons de longueur d'onde λ_2:

$\lambda_2 = 0{,}540\,\mu$, $I = 75°31'$, $H = 30°48'$. (XVI)

---

1) Quincke, *Pogg. Ann.* Jubelband, p. 342.
2) Drude, *Wied. Ann.* Bd. 39, p.34, 1890.

§ 21. Un miroir, qui servit à des mesures à la lumière blanche, avait comme constantes optiques, pour des rayons D:

$$I = 76°23', \qquad H = 29°31'. \qquad \text{(XVII)}$$

§ 22. Enfin, les constantes optiques du miroir, sur lequel furent effectuées les mesures de dispersion les plus précises, étaient les suivantes :

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0{,}618\,\mu, & I = 76°11', & H = 30°24', \\ \lambda_3 = 0{,}460\,\mu, & I = 73°8', & H = 31°44'. \end{array}\right\} \text{(XVIII)}$$

§ 23. *Mesures de l'auteur.* Les mesures ont été faites d'après les méthodes indiquées au chapitre premier et au § 10, et par les moyens décrits au même endroit. Les miroirs employés ont été caractérisés ci-dessus (§ § 18—22) par leurs constantes optiques. Toutefois, comme celles-ci peuvent varier durant la mesure des rotations (voir § 11), j'ai, dans mes expériences définitives, toujours effectué des mesures au compensateur, au commencement et à la fin de chaque série. J'ai fait scrupuleusement attention à ce point dans les observations faites sur les miroirs des § § 21 et 22. Le calcul des résultats définitifs fut toujours repris avec la valeur moyenne des constantes optiques (voir § 12). Je me fis une loi de rejeter toute série d'expériences faite sur un miroir, dont les variations dans l'angle d'incidence principale, durant cette série, se montrèrent supérieures à 30'.

§ 24. Dans chaque mesure à faire, les doubles rotations à zéro et au minimum furent déterminées en aimantant le miroir d'abord dans une direction, puis dans la direction opposée. L'amplitude et la phase, μ et m, de la composante magnéto-optique peuvent être calculées, à l'aide de ces rotations, des formules simples précédemment données (voir § 4). Il faut pourtant qu'il soit en ce cas satisfait à la supposition toute naturelle, que μ changerait de signe quand l'aimantation se renverse, tandis que m conserverait la valeur primitive. S'il n'en était pas ainsi, on se trouverait en contradiction avec le

principe des images symétriques. Aussi M. Sissingh [1]) a-t-il pu montrer par ses mesures l'exactitude de cette supposition. Je désirais voir jusqu'à quel point mon appareil permettrait d'arriver au même résultat; d'autant plus qu'il serait par là possible de juger de la construction symétrique de l'appareil entier. Mais il fut bientôt évident qu'il n'y avait pas bien moyen de réaliser ce projet, parce que la désaimantation du miroir laissait à désirer. Celui-ci présentait tantôt le magnétisme boréal, tantôt le magnétisme austral, ce qui résultait évidemment des circonstances plus ou moins accidentelles de la désaimantation. Si l'on prend, en conséquence, la valeur moyenne de quelques séries d'expériences, le résultat peut être indépendant du magnétisme rémanent accidentel. La liste suivante peut servir d'exemple; elle comprend les résultats définitifs des rotations au minimum du polariseur, *i* étant égal à 50°, et pour des intensités d'aimantation différentes.

Aimantat. +	Aimantat. —	
— 11,3	+ 9,1	
— 2,5	+ 4,6	
— 6,8	+ 5,1	
— 10,2	+ 11,4	
— 7,0	+ 6,1	. . . (XIX)
— 6,5	+ 8,5	
— 9,5	+ 8,5	
— 13,0	+ 14,6	
— 8,7	+ 8,5.	

1′ = 1,3 division de l'échelle.

Je me suis assuré, dans un ou deux cas, par mesure directe du moment magnétique du noyau de l'électro-aimant, que la différence entre les deux colonnes pouvait parfaitement s'expliquer par l'aimantation du miroir.

---

[1]) Sissingh. *Akad* p. 27; *Arch. Neerl.* p. 207.

Toutefois, l'électro-aimant ne pouvait (voir § 1), sans retard considérable, être remplacé par un autre de fer plus doux; je continuai donc mes expériences avec celui employé jusqu'à ce moment. Un examen plus approfondi montre que le magnétisme rémanent n'a pas d'influence sur l'exactitude de la détermination des rotations, faite de la manière indiquée au commencement de ce §.

§ 25. *Résultats*. J'ai fait des mesures à la lumière verte sur le petit miroir précipité par voie électrolytique, dont il a été question au § 18*. La longueur d'onde de cette lumière était en moyenne $\lambda = 0{,}540\ \mu$ (§ 5). Les doubles rotations, exprimées en minutes, sont, i étant égal à 50°, et les rayons verts de la longueur d'onde $\lambda = 0{,}540\ \mu$:

$$\psi^{\circ}_{ip} = -\ 6{,}9\,;\ \psi^{\circ}_{ia} = +\ 9{,}7\,;\ \psi^{m}_{ip} = -\ 17{,}8\,;\ \psi^{m}_{ia} = +\ 12{,}8 \quad \text{(XX).}$$

On déduit, à l'aide des constantes données § 18,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{des rotations à zéro} & m_i = 10°37' + 180° \\ \text{des rotations au minimum} & m_i = 23°22' + 180°.\end{array}\right\} \quad \text{(XXI).}$$

Comme on s'y attendait d'ailleurs (§ 18*), les résultats obtenus suivant les deux méthodes ne concordent pas bien.

§ 26. Des mesures furent effectuées sur le miroir massif de cobalt décrit § 19, et à la lumière verte ($\lambda = 0{,}540\ \mu$).

i étant égal à 50°, ψ°_{ia} était presque nul; pour $\psi^{\circ}_{ia} = 0$ on aurait:

$$\lambda_2 = 0.540\ \mu, \qquad m_i = 25°9' + 180°. \qquad \text{(XXII).}$$

Pour l'angle d'incidence $i = 60°$, je trouvai:

ψ^{m}_{ip}	ψ^{m}_{ia}	ψ°_{ip}	ψ°_{ia}	
— 26,4	+ 15,8⁵	— 20,3	+ 3,9⁵	(XXIII).

On peut déduire de chacun des systèmes aussi bien les phases que les amplitudes; on déduit

des rotations à zéro:

$$m_i = 32°30' + 180°; \qquad \mu = 0{,}00227\,;$$

des rotations au minimum: (XXIV)

$$m_i = 33°37' + 180°; \qquad \mu_i = 0{,}00244.$$

La concordance des phases entre les deux méthodes est bien satisfaisante. On peut se demander toutefois laquelle des deux méthodes donne les résultats les plus précis. On trouve que, pour $i = 60°$, les rotations au minimum donnent la valeur la plus exacte pour l'amplitude, ce que font au contraire les rotations à zéro pour la phase. Je donne ci-dessous, comme exemple, les résultats fournis par les calculs, effectués sur les valeurs marquées d'un astérisque, et je les ai mis en parallèle avec les résultats déduits des grandeurs réellement observées.

$i = 60°$ $\lambda = 0{,}540\ \mu$

ψ_{ip}^{m}	ψ_{ia}^{m}	ψ_{ip}^{o}	ψ_{ia}^{o}	$180° + m$	$\mu \times 10^3$		
$-26{,}4$	$+15{,}8^5$	$-20{,}3$	$+3{,}9^5$	32°30′	2,27	déduit de ψ^o	(XXV)
$-26{,}8$*	$+15{,}8$*	$-21{,}0$*	$+3{,}8^5$	*31°54′	2,39*		
				33°37′	2,44	déduit de ψ^m	
				*34°55′	2,48*		

Si maintenant on déduit la phase des rotations à zéro, et l'amplitude, à l'aide de la phase trouvée, des rotations au minimum, il vient:

$i = 60°$; $\lambda_2 = 0{,}540\ \mu$; $m_i = 32°30' + 180°$; $\mu_i = 0{,}00241$; (XXVI)

de même, pour $i = 72°$, on déduit de

ψ_{ip}^{m}	ψ_{ia}^{m}
$-20{,}4$	$+10{,}3$

$i = 72°$; $\lambda_2 = 0{,}540\mu$; $m_i = 45°5' + 180°$; $\mu_i = 0{,}00196$ (XXVII).

Comme la phase a été déduite des rotations au minimum la détermination n'en est pas très exacte.

§ 27. Tous les observateurs antérieurs, qui ont, d'une façon quelque peu détaillée, effectué des rotations à zéro et au minimum, rapportent qu'entre les valeurs numériques existent les relations $\psi_{ip}^{m(o)} = \psi_{pa}^{m(o)}$, et $\psi_{ia}^{m(o)} = \psi_{pp}^{m(o)}$. Mes observations sur le fer confirment cette assertion d'une manière satisfaisante (§ 11). Des mesures faites sur le miroir décrit § 20, à la lumière verte de la longueur d'onde $\lambda_2 = 0{,}540\ \mu$, me firent

douter un instant de l'exactitude de ces relations, dans la réflexion sur le cobalt. Je trouvai en effet, pour $i = 60°$:

ψ^{o}_{pp}	ψ^{o}_{pa}	ψ^{m}_{pp}	ψ^{m}_{pa}
$-8{,}0^5$	$+15{,}4^5$	$-15{,}3$	$+22{,}7$
ψ^{o}_{ia}	ψ^{o}_{ip}	ψ^{m}_{ia}	ψ^{m}_{ip}
$+3{,}3^5$	$-19{,}0$	$+12{,}4$	$-19{,}9.$

Cependant, comme ces observations ont été faites à la lumière verte, l'écart présenté par les relations citées s'explique en partie par la difficulté des orientations lorsque la lumière est faible; en partie aussi, comme je m'en aperçus trop tard, parce que l'aimant secondaire n'était pas exactement centré. La forme discoïde du miroir peut d'ailleurs avoir contribué à rendre l'aimantation moins homogène.

Les résultats auxquels on arrive dans l'hypothèse que les erreurs accidentelles ont produit ici l'écart en question, résultats qu'on ne peut donc employer que sous réserve, sont les suivants:

		$m - 180°$	μ
$i = 60°$;	$\lambda_2 = 0{,}540\,\mu$;	$27°33'$;	$2{,}00 \times 10^{-3}$

L'aimantation I s'élevait ici à environ 580 C. G. S.

§ 28. Heureusement les résultats ultérieurs confirment, dans les limites des erreurs d'observation, d'une façon complète l'exactitude des relations citées dans le précédent §. J'ai effectué à la lumière blanche [1]), à cause de la plus grande exactitude des orientations, et à trois incidences, des mesures sur le miroir signalé au § 21. Les résultats sont réunis dans le tableau suivant, les rotations étant exprimées en minutes. Les positions des nicols sont désignées par A et P pour l'analyseur et le polariseur. Les indices i et p indiquent que le plan de polarisation de ces deux pièces se trouve soit dans le plan d'incidence, soit perpendiculairement à celui-ci. Les indices 1 et 2 distinguent les deux positions opposées [2]).

[1]) Le trait est, avec cette lumière, peu coloré, voir § 13.

[2]) Voir Sissingh, *Dissertation*, p. 24.

Rotations à zéro et au minimum, sous divers angles d'incidence. Lumière blanche.

Angle d'incid.	Posit. des nicols	ψ^m_{ip}	ψ^m_{ia}	Posit. des nicols.	ψ^m_{pp}	ψ^m_{pa}	$[\psi^m_{pa}]$	$[\psi^m_{pp}]$	
$i = 45°$	$A_{p_1}P_{i_1}$	15,4	11,5	$A_{i_1}P_{p_2}$	11,9	14,9			(XXVIII)
	$A_{p_2}P_{i_2}$	14,7	11,5	$A_{i_2}P_{p_1}$	12,2	15,2	$+ 15,0^5$	$- 11,8$	
$i = 60°$	$A_{p_1}P_{i_1}$	19,6	13,2	$A_{i_2}P_{p_1}$	12,3	19,9			
	$A_{p_2}P_{i_2}$	19,3	13,2	$A_{i_1}P_{p_2}$	12,3	20,7	$+ 19,9$	$- 12,7^5$	
$i = 73°$	$A_{p_2}P_{i_1}$	18,8	11,2	$A_{i_2}P_{p_1}$	11,4	17,3			
	$A_{p_1}P_{i_2}$	19,5	11,4	$A_{i_1}P_{p_2}$	10,8	17,7	$+ 18,3$	$- 11,2$	
		ψ°_{ip}	ψ°_{ia}		ψ°_{pa}	ψ°_{pp}	$[\psi^\circ_{pa}]$	$[\psi^\circ_{pp}]$	
$i = 45°$	$A_{p_1}P_{i_1}$	16,7	0,5	$A_{i_1}P_{p_2}$	16,5	1,3			(XXIX)
	$A_{p_2}P_{i_2}$	16,3	0,2	$A_{i_2}P_{p_1}$	21,7	4,4	$+ 17,5$	$+ 1,4$	
$i = 60°$	$A_{p_1}P_{i_1}$	15,1	5,2	$A_{i_2}P_{p_1}$	16,6	3,3			
	$A_{p_2}P_{i_2}$	17,7	4,5	$A_{i_1}P_{p_2}$	16,6	2,6	$+ 16,5$	$- 3,9$	
$i = 73°$	$A_{p_2}P_{i_1}$	14,6	8,8	$A_{i_2}P_{p_1}$	16,4	7,9			
	$A_{p_1}P_{i_2}$	14,9	9,9	$A_{i_1}P_{p_2}$	15,6	8,4	$+ 15,4$	$- 8,7^5$	

Afin d'obtenir des résultats plus précis, je prendrai les valeurs moyennes de ψ°_{pp} et ψ°_{ia}, etc. Les moyennes finales des ψ sont représentées dans le tableau, et seront dorénavant indiquées par le signe $[\psi]$.

Les résultats des observations, à la lumière blanche, effectuées sous 3 incidences différentes pour des raisons qui seront rapportées dans la suite (§ 32), sont les suivants :

	$[\psi^\circ_{pa}]$	$[\psi^\circ_{pp}]$	$[\psi^m_{pa}]$	$[\psi^m_{pp}]$	$m - 180°$	μ	$J.$	
$i = 45°$	$+17,5$	$+1,4$	$+15,0^5$	$-11,8$	20°34′	$1,58 \times 10^{-3}$	430	(XXX)
$i = 60°$	$+16,5$	$-3,9$	$+19,9$	$-12,7^5$	27°40′	$1,50 \times 10^{-3}$	530	
$i = 73°$	$+15,4$	$-8,7^5$	$+18,3$	$-11,2$	37°55′	$1,17 \times 10^{-3}$	700	

Les observations faites aux diverses incidences ont été effectuées aux intensités d'aimantation indiquées. Les amplitudes ont été réduites à l'aimantation $I = 430$ C.G.S. [1]).

[1]) C'est bien là une remarque qui a échappée à l'attention de M. Drude dans un récent travail (*Wied. Ann.* Bd. 49, p. 69 1893). Je me propose de revenir plus tard sur ce point.

Les phases sont naturellement données telles qu'elles résultent de l'observation, car on ne peut guère se représenter que la phase ne serait pas indépendante de l'intensité du champ magnétique. Je n'ai pas fait de mesures spéciales touchant ce point. Si l'on juge indispensable une preuve expérimentale, on peut se référer provisoirement aux mesures d'autres observateurs, faites avec un degré d'aimantation complètement différent. La plupart en effet ont mesuré l'angle pour lequel le signe des rotations à zéro se renverse ($\varphi^{\circ}_{ip} = \varphi^{\circ}_{pa} = 0$). Les valeurs trouvées pour cet angle par les divers observateurs concordent bien [1]); et il est facile de voir que dès lors la phase de la composante magnéto-optique a la même valeur dans ces différents cas. Le fait que la rotation susdite devient nulle pour une certaine incidence signifie en effet simplement, que la différence de phase entre la composante magnéto-optique et la composante de la réflexion sur le métal, pour ce même angle, est égale à 180°. Si donc les constantes optiques des miroirs employés ont été à peu près les mêmes, la même chose s'applique à la phase de la composante magnéto-optique. Ces constantes furent toujours déterminées au commencement et à la fin de chaque série d'expériences (§ 12 et 23). Les variations n'ont été, en général, que peu importantes. Je prends comme exemple la détermination des constantes optiques après et avant les mesures, pour $i = 73°$:

avant les mesures $I = 76°0'$; $H = 29°30'$; Lumière D.
après „ „ $I = 75°55'$; $H = 29°58'$; „

Les mesures mentionnées dans ce paragraphe ont été employées dans l'étude de la différence de phase de Sissingh, au point de vue de sa constance (§ 32 et Introduction).

§ 29. Des mesures relatives à la *Dispersion* ont été faites avec les 3 couleurs des §§ 18 et 19.

Les miroirs employés sont ceux mentionnés aux §§ 19 et 22. Seuls, les résultats des mesures faites avec le dernier de ces

---

[1]) Voir e. a. Drude, *Wied. Ann.*, Bd. 46, p. 396, 1892.

deux miroirs méritent pleine confiance. Il y a pour ce fait deux raisons principales. Les mesures sur le miroir du § 19 ont, en effet, été faites seulement à lumière polarisée parallèle au plan d'incidence. De plus, la valeur des constantes optiques n'a pas été déterminée après chaque série de mesures, effectuée avec une des couleurs employées. Il se peut en outre que l'aimant secondaire n'ait pas été exactement centré en face de la surface réfléchissante. Les constantes optiques avaient subi aussi des variations assez considérables, lorsque la détermination fut reprise à la fin de la série. La difficulté des orientations est cause que chacune d'elles réclame un temps assez long; la bobine s'échauffait donc assez fortement si l'on ne laissait s'écouler une heure entre chaque série de six mises au repère, par exemple. Or, cela m'était impossible lors des travaux nécessités pour le mémoire de concours. Les déterminations du § 31 ont été faites dans des circonstances plus favorables.

Afin de donner une idée de l'exactitude des orientations, quand on emploie la lumière rouge, je rapporte ci-dessous, faisant usage des mêmes notations qu'au § 10*, les chiffres relatifs à une position déterminée des nicols.

Angle d'incidence $i = 60°$. *Lumière rouge.*

Rotations à zéro.

P_1	P_2	Diff.		A_1	A_2	Diff.	
36,8	42,2	5,4		75,2	53,0	22,2	
31,6	39,0	7,4	6,4	65,0	49,9	15,1	18,6
37,0	40,3	3,3		75,0	55,8	19,2	
31,0	34,4	3,4	3,4	71,8	54,0	17,8	18,5
37,1	42,8	5,7		73,2	47,2	26,0	
34,8	44,8	10,0	7,8	64,1	49,9	14,2	20,1
39,2	43,0	3,8		76,4	56,3	20,1	
36,2	41,8	5,6	4,7	71,0	55,2	15,8	17,9
36,1	40,2	4,1		68,4	44,9	23,5	
36,1	43,2	7,1	5,6	73,1	57,0	16,1	19,8
40,5	44,5	4,5		76,4	54,0	22,5	
35,5	45,0	9,5	7,0	71,8	59,9	11,9	17,2
			5,8 div. éch.				18,7 div. éch.

Rotations au minimum.

P_1	P_2	Diff.		A_1	A_2	Diff.	
329,3	352,4	23,1		171,2	151,7	19,5	
25,1	42,0	16,9	20,0	69,4	43,0	26,4	22,9
27,5	52,2	24,7		79,2	50,8	28,4	
25,2	43,2	18,0	21,3	69,9	49,3	20,6	24,5
20,9	43,1	22,2		68,2	46,1	22,1	
27,9	46,5	18,6	20,4	76,4	55,5	20,9	21,5
23,2	43,4	20,2		66,5	48,5	18,0	
23,3	40,6	17,3	18,7	79,8	54,0	25,8	21,9
23,5	47,2	23,7		71,8	48,9	22,9	
26,5	41,2	14,7	19,2	77,4	54,2	23,2	23,0
			20,0 div. éch.				22,8 div. éch.

Observations de réduction.

Polariseur.				Analyseur.			
218	312,1	**219**	403,1	**182**	76,8	**183**	145,6
	10,0		398,8		6,5		43,8
	10,0		402,1		5,0		45,5
	11,8		400,0		4,0		41,8
	311,0		401,0		75,6		144,2

60′ = 90,0 div. de l'éch. 60′ = 68,6 div. de l'éch.

De ceci résulte que

$\psi^{\circ}_{pp} =$ 5,8 div. de l'éch. $= -$ 3,9′ $\psi^{m}_{pp} =$ 20,0 div.éch, $= -13,3'$

$\psi^{\circ}_{pa} = 18,7$ „ $= +15,6'$ $\psi^{m}_{pa} = 22,8$ „ $= +20,0'$

§ 30. Des mesures ont été faites sur le miroir du § 19, pour 3 couleurs différentes (§ 18 et 19), sous un angle d'incidence $i = 60°$.

Couleur.	ψ^{m}_{ip}	ψ^{m}_{ia}	ψ°_{ip}	ψ°_{ia}	$m - 180°$	μ	
λ_1	+ 25,6	— 16,4	— 15,8	+ 7,4	22°33′	$2,30 \times 10^{-3}$	
λ_2	+ 26,4	— 15,8⁵	— 20,3	+ 3,9⁵	32°30′	$2,41 \times 10^{-3}$	(XXXI)
λ_3	+ 23,3	— 14,3	— 19,1	+ 4,9	33°55′	$2,18 \times 10^{-3}$.	

§ 31. Les résultats qui méritent toutefois le plus de confiance sont obtenus par réflexion sur le miroir du § 22. Ils sont rassemblés dans le tableau suivant:

Rotations à zéro et au minimum, pour diverses couleurs.

Angle d'incidence $i = 60°$. $I = 570$ C.G.S.

Couleur.	Position des nicols.	ψ^m_{ip}	ψ^m_{ia}	Position des nicols.	ψ^m_{pp}	ψ^m_{pa}	$[\psi^m_{pa}]$	$[\psi^m_{pp}]$
λ_3	$A_{p_1} P_{i_2}$	22,3	12,8	$A_{i_2} P_{p_1}$	11,1	20,9		
	$A_{p_2} P_{i_1}$	20,3	12,0	$A_{i_1} P_{p_2}$	9,6	21,4	+ 21,2	—11,4
λ_1	$A_{p_1} P_{i_2}$	23,1	14,8	$A_{i_2} P_{p_1}$	13,3	20,0		
	$A_{p_2} P_{i_1}$	21,6	12,3	$A_{i_1} P_{p_2}$	12,3	20,0	+ 21,2[5]	—13,2
		ψ°_{ip}	ψ°_{ia}		ψ°_{lp}	ψ°_{la}	$[\psi^\circ_{lp}]$	$[\psi^\circ_{la}]$ (XXXII)
λ_3	$A_{p_1} P_{i_2}$	16,8	5,0	$A_{i_2} P_{p_1}$	4,0	17,9		
	$A_{p_2} P_{i_1}$	14,0	6,1	$A_{i_1} P_{p_2}$	3,6	18,8	— 4,2	+ 16,9
λ_1	$A_{p_1} P_{i_2}$	14,9	5,5	$A_{i_2} P_{p_1}$	3,9	15,6		
	$A_{p_2} P_{i_1}$	14,0	6,2	$A_{i_1} P_{p_2}$	3,9	14,9	— 4,9	+ 14,8.

Les valeurs définitives (§ 28) des rotations, et les résultats qu'on en tire (§ 23) par le calcul, pour la lumière rouge et blanche, sont les suivantes. L'angle d'incidence était $i = 60°$.

Couleur.	$[\psi^\circ_{pp}]$	$[\psi^\circ_{pa}]$	$[\psi^m_{pa}]$	$[\psi^m_{pp}]$	m—180°	μ	
λ_1	— 4,9	+14,8	+21,2[5]	—13,2	25°56′	$1{,}89 \times 10^{-3}$	(XXXII[a])
λ_3	— 4,2	+16,9	+21,2	—11,4	35°45′	$1{,}77 \times 10^{-3}$	

Je m'aperçus, à la fin des observations à la lumière bleue, que l'angle d'incidence principale avait diminué de 4′ seulement. Le miroir se trouvait donc presque identiquement dans le même état que lors des observations à la lumière rouge. Les observations de dispersion deviennent de ce chef absolument comparables, et permettent bien les conclusions formulées au § 33.

§ 32. *Comparaison des résultats obtenus avec la théorie.* Les formules de M. van Loghem (voir § 14 et Introduction), m'ont servi à calculer la phase et l'amplitude à l'aide des constantes optiques déjà trouvées antérieurement. Je fais suivre ici une comparaison entre ce calcul et les données fournies par le calcul, appliqué à mes observations. Les mesures à la lumière verte, faites sur le miroir massif de cobalt, mentionné § 19, conduisirent aux résultats suivants :

Miroir massif de cobalt $\lambda = 0{,}540\,\mu$

Angle d'incid.	$m - 180°$ observé	$m - 180°$ calculé.	μ observé	μ calcul.	S	$\frac{\mu \text{ observé}}{\mu \text{ calculé}}$.
50°	(25°9′)	—22°21′			(47°30′)	
60°	32°30′	—16°53′	$2{,}41 \times 10^{-3}$	$2{,}44\,A$	49°23′	$0{,}99 \times \frac{10^{-3}}{A}$
72°	45°51′	— 6°44′	$1{,}96 \times 10^{-3}$	$2{,}02\,A$	51°49′	$0{,}97 \times \frac{10^{-3}}{A}$.

(XXXIII)

Les différences de phase aux incidences de 50° et 72° sont moins précises pour les raisons déjà indiquées au § 39.

Les résultats de ces mesures montrent déjà que la phase de Sissingh peut être passablement constante.

L'aimantation était d'environ 700 unités C. G. S.

J'ai cependant examiné ce point de plus près à propos de quelques observations dues à M. Drude (voir § 35). Je fis des mesures (voir § 28), à la lumière blanche, sur le miroir du § 21. Les résultats définitifs relatifs à l'amplitude ont été réduits à l'aimantation $I = 430$ C.G.S., et les constantes optiques soumises à un contrôle incessant. (Voir pour les aimantations § 28.)

Miroir massif de cobalt; lumière blanche.

Angle d'incid.	$m - 180°$ observé	$m - 180°$ calculé.	μ observé	μ calculé.	S	$\frac{\mu \text{ observé}}{\mu \text{ calculé}}$.
45°	20°34′	—28°47′	$1{,}58 \times 10^{-3}$	$2{,}76\,A$	49°21′	$0{,}57 \times \frac{10^{-3}}{A}$
60°	27°40′	—21°49′	$1{,}50 \times 10^{-3}$	$2{,}71\,A$	49°29′	$0{,}56 \times \frac{10^{-3}}{A}$
73°	37°55′	—11°43′	$1{,}17 \times 10^{-3}$	$2{,}18\,A$	49°38′	$0{,}54 \times \frac{10^{-3}}{A}$.

(XXXIV)

Ces observations démontrent donc que la différence de phase de Sissingh est sans doute, pour le cobalt aussi, à peu près constante dans de très larges limites. Elles confirment en même temps les valeurs qui en ont été données plus haut. (Voir l'Introduction).

§ 33. L'application du calcul aux observations du § 30,

relatives à la dispersion du phénomène de Kerr, donne les résultats suivants:

Miroir de cobalt du § 19; $i = 60°$; $I = 700$ C. G. S.

Couleur.	$m - 180°$ observé	$m - 180°$ calculé.	μ observé	μ calculé.	S	μ observé. / μ calculé.
λ_1	22°33′	—18°39′	$2{,}30 \times 10^{-3}$	$2{,}77\ A$	41°12′	$0{,}83 \times \frac{10^{-3}}{A}$
λ_2	32°30′	—16°53′	$2{,}41 \times 10^{-3}$	$2{,}44\ A$	49°23′	$0{,}99 \times \frac{10^{-3}}{A}$
λ_3	33°55′	—16°56′	$2{,}18 \times 10^{-3}$	$2{,}03\ A$	50°51′	$1{,}07 \times \frac{10^{-3}}{A}$.

(XXXV)

Il est cependant possible, en partant du § 29, de critiquer jusqu'à un certain point quelques-unes des observations sur lesquelles ces résultats reposent. Mais les mesures faites sur le miroir des §§ 22 et 31 sont, bien complètement à l'abri de ces critiques. Comme il a déjà été dit (§ 31), la surface réflechissante était, à la fin des mesures en lumière bleue, encore identique à ce qu'elle était dans celles en lumière rouge. La valeur de la dispersion n'est exactement donnée que par des mesures faites sur ce miroir. Il est probable que surtout la mesure faite à la lumière rouge sur le miroir signalé § 19 a été inexacte. Voici les résultats définitifs.

Miroir de cobalt du § 22; $i = 60°$; $I = 570$ C. G. S.

Couleur.	$m - 180°$ observé	$m - 180°$ calculé.	μ observé	μ calculé.	S	μ observé / μ calculé.
λ_1	25°56′	—19°36′	$1{,}89 \times 10^{-3}$	$2{,}66\ A$	45°32′	$0{,}71 \times \frac{10^{-3}}{A}$
λ_3	35°45′	—16°10′	$1{,}77 \times 10^{-3}$	$1{,}91\ A$	51°55′	$0{,}93 \times \frac{10^{-3}}{A}$

(XXXVI).

Ces dernières observations confirment donc le résultat déjà provisoirement [1]) déduit de la série XXXV, en vertu duquel la phase de Sissingh a une valeur différente pour des rayons de longueur d'onde différente. On ne peut donc pas analyser les phénomènes en faisant entrer en compte la dis-

[1]) *Séance de l'Acad. royale d'Amsterdam* du 25 Juin '92.

persion des constantes optiques à l'aide d'une seule valeur déterminée de la phase de Sissingh (celle pour les rayons D. p. ex.); il devient indispensable d'en donner la valeur pour chaque couleur du spectre que l'on emploie. La variation de la phase de Sissingh avec la longueur d'onde démontre donc qu'il existe une *dispersion de phase magnéto-optique.* La valeur de la phase diminue à mesure que la longueur d'onde augmente, le cobalt et le fer étant d'accord à ce point de vue (§ 15). Mais tandis que la dispersion des phases magnéto-optiques est chez le fer de 9° (§ 15), cette valeur ne s'élève chez le cobalt, pour une même différence des longueurs d'onde, qu'à 6°,5 environ. Il semble, en règle générale, que pour des phénomènes de même ordre que ceux-ci, l'influence d'une modification de la longueur d'onde se fait sentir davantage chez le fer que chez le cobalt. Les mesures de M. Dubois [1]), relatives à la réflexion normale polaire, et celles de M. Lobach [2]) touchant la dispersion rotatoire dans le fer et le cobalt, démontrent le fait d'une manière évidente.

Les séries XXXV et XXXVI concordent parfaitement pour ce qui concerne les amplitudes. Dans ces séries l'existence d'une *dispersion magnéto-optique des amplitudes* se trouve de nouveau confirmée. Il n'est naturellement pas possible de déduire exactement la valeur de celle-ci de la dispersion des rotations, dans l'incidence normale, car dans ce cas aussi la lumière est polarisée elliptiquement, et il faut avant tout procéder à une détermination de la phase [3]).

§ 34. M. Goldhammer a donné récemment, comme il a été dit dans l'Introduction, une nouvelle théorie du phénomène de Kerr [4]). Il introduit, à cette occasion, dans ses formules la dif-

---

[1]) Dubois. *Wied. Ann.*, Bd. 39, p. 38, 1890.

[2]) Lobach. *Wied. Ann.*, Bd. 39, p. 347, 1890.

[3]) La lumière n'est cependant que légèrement elliptique (voir Kundt, *Wied. Ann.*, Bd. 23, p. 228, § 5). J'ai calculé la phase, dans l'incidence normale, pour le fer à 39° environ, pour le cobalt à 14°, pour le nickel à 5°.

[4]) Goldhammer. *Wied. Ann.*, Bd. 46, p. 71, 1892.

férence de phase de Sissingh S comme une constante $= -\delta$. Les formules finales prennent la même forme que celles de la théorie de M. Lorentz, sauf qu'il y a, pour l'expression de la phase, une différence constante $-\delta$. Grâce à cette circonstance, la concordance avec l'observation devient complète, comme il résulte des faits précédents.

Quelque temps après l'article de M. Goldhammer parut un travail de M. Drude [1]), qui renferme non seulement un exposé intéressant des équations différentielles données jusqu'à cette époque en vue d'une explication du phénomène de Kerr, mais propose encore une théorie nouvelle. Dans cette nouvelle théorie une seule constante se trouve introduite au lieu de la quantité complexe renfermée dans les équations différentielles de M. Goldhammer, à savoir deux constantes magnéto-optiques. Mais on ne peut rendre compte du phénomène de Kerr d'une manière aussi simple [2]). On pourrait alors, comme M. Goldhammer le fit observer, déduire par le calcul la différence de phase de Sissingh d'une seule des constantes optiques du miroir, à l'aide des formules

$$2\,O - \delta = \pi,\ 2\,\pi,\ 3\,\pi,\ \text{etc.}$$

dans lesquelles O représente la grandeur introduite par M. Eisenlohr, et nommée τ dans la théorie de M. Lorentz. M. Goldhammer [3]) a déjà conclu de mes observations préliminaires, donnant $S = 50°$, tandis que la théorie de M. Drude donne $S = 60°$, que cette dernière théorie est inexacte. Mes observations plus récentes confirment ce que j'ai trouvé antérieurement. C'est ainsi que mes dernières mesures de dispersion sur un miroir, pour lequel, en lumière rouge, τ était égal à $58°17'$, ont montré que $S = 45°32'$. La théorie de M. Drude donne $S = 61°26'$. Cette même théorie conduit d'ailleurs à une dispersion de sens opposé à celle qui résulte de

---

[1]) Drude. *Wied. Ann.*, Bd. 46, p. 353, 1892.

[2]) J'espère revenir sur ce point prochainement.

[3]) Goldhammer, *Wied. Ann.*, Bd. 47, p. 345, 1892; voir aussi Drude, *Wied. Ann.*, Bd. 48, p. 122, 1893.

mes expériences. La différence de phase de Sissingh est d'après mes mesures, plus grande pour la lumière rouge que pour la lumière bleue, tandis que la théorie de M. Drude réclame le contraire.

§ 35. *Résultats d'observateurs précédents.* C'est seulement des mesures récemment publiées par M. Drude [1]), relatives à la réflexion équatoriale, que l'on peut déduire la phase et l'amplitude de la composante magnéto-optique. Il n'en est pas ainsi des mesures d'autres observateurs, comme il a été remarqué dans l'Introduction. L'application du calcul [2]) aux mesures de M. Drude donne les résultats suivants:

Observations de M. Drude sur le cobalt.

Lumière blanche.

i	$m-180°$ observé	$m-180°$ calculé.	μ observé	μ calculé.	S	$\frac{\mu \text{ observé}}{\mu \text{ calculé}}$.
35°	—77°24′	—89°3′	$2{,}80 \times 10^{-3}$	$0{,}450\, A$	11°39′	$6{,}20 \times \frac{10^{-3}}{A}$.
60°	—25°27′	—79°42′	$0{,}56 \times 10^{-3}$	$0{,}629\, A$	54°15′	0,90 „
75°	—12°56′	—67°1′	$0{,}54 \times 10^{-3}$	$0{,}574\, A$	54°5′	0,95 „
83°	—12°57′	—54°9′	$0{,}50 \times 10^{-3}$	$0{,}389\, A$	41°12′	1,30 „

(XXXVI*a*).

Les valeurs prises pour les constantes optiques sont celles trouvées jadis par M. Drude [3]).

Les valeurs de S oscillent entre 11°39′ et 54°15′. Le rapport entre les amplitudes observées et calculées conduit à des constantes comprises entre 6,2 et 0,9. On croirait donc à première vue que les observations de M. Drude sont contraires à la constance de S; mais ses observations consistent en des rotations au minimum, dans lesquelles les erreurs d'observation ont beaucoup plus d'influence, à la plupart des incidences, sur la valeur de la différence de phase de Sissingh, que dans les rotations à zéro. Les mesures rapportées par moi au § 28 montrent assez l'exactitude des conclusions formulées au § 32.

---

[1]) Drude, *Wied. Ann.*, Bd. 46, p. 397, 1892.

[2]) Déjà communiquée dans la Séance de l'Acad. royale d'Amsterdam du 29 Oct. 1892.

[3]) Drude, *l. c.* p. 397 et *Wied. Ann.*, Bd. 39, p. 34, 1890.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Etude de la réflexion polaire sur le nickel.

§ 36. *Matériaux.* Je serai très-bref au sujet des différentes manières dont j'ai en vain essayé de me procurer des miroirs de nickel suffisamment plans et purs. Le nickelage de miroirs de fer poli et le polissage de surfaces nickelées ne m'ont pas donné de résultats satisfaisants. J'ai également tâché d'obtenir par voie électrolytique, comme il a été mentionné à propos du cobalt (§ 18), des surfaces réfléchissantes sur le verre à miroirs de M. Kundt. Le bain consistait en ce qu'on appelle un bain de nickelage américain, composé d'une solution de sulfate nickeleux ammoniacal additionné d'acide citrique et de sulfate d'ammoniaque. L'anode était une plaque de nickel pur. Le courant était fourni par deux éléments Daniell, tandis qu'un banc de résistance se trouvait intercalé dans le circuit. Des difficultés sont créées par la desquammation de la couche de nickel, qui s'établit aussitôt que l'on essaie de donner à celle-ci une certaine épaisseur. Les dimensions des miroirs sont celles données à propos du cobalt.

Les constantes optiques, pour la lumière D, étaient

$$\lambda = 0{,}589\,\mu;\quad I = 74^\circ 16';\quad H = 32^\circ 34'.$$

§ 37. M.M. Mond, Langer et Quincke [1]) ont découvert en 1890 que la vapeur du nickel-carbonyle possède la propriété de se déposer sous forme de miroir, lorsqu'on la fait passer par un tube chauffé. Souvent aussi on arrive à obtenir un miroir sur la face qui ne regarde pas le verre. M. le prof. Hoogewerff, à Delft, a eu la bonté de faire déposer des

---

[1]) Mond, Langer and Quincke, *Journ. Chem. Soc.*, vol. 57, p. 749, 1890.

miroirs de cette nature sur de petites plaques de verre, que j'avais fait tailler à cet effet. Le plus parfait de ces miroirs avait pour constantes optiques, en lumière D:

$$\lambda = 0{,}589\,\mu;\ I = 71°16';\ H = 33°52'.$$

Ces chiffres s'écartent beaucoup des valeurs trouvées par MM. Quincke, Drude et autres. J'ai enfin obtenu les plus beaux miroirs de nickel par polissage de petits disques, taillés dans un morceau de nickel pur. Je n'ai toutefois pas eu le temps d'effectuer là-dessus des mesures plus détaillées.

§ 38. *Mesures et résultats de l'auteur.* Des mesures faites sur le petit miroir mentionné au § 36 donnèrent, à la lumière D, les résultats suivants: $i = 50°$.

	ψ_{ip}°	ψ_{ia}°	ψ_{ip}^{m}	ψ_{ia}^{m}	$m-180°$	μ
$\lambda = 0{,}589\,\mu$	$-7{,}1$	$+6{,}5$	$-11{,}8$	$+9{,}7$	$11°40'$	$1{,}20 \times 10^{-3}$.

La phase a été déduite par le calcul des rotations au minimum.

§ 39. Le calcul, effectué à l'aide des constantes optiques du § 36, donne les résultats suivants:

Couleur.	$m-180°$ observé	$m-180°$ calculé.	μ observé	μ calculé.	S	$\frac{\mu \text{ observé}}{\mu \text{ calculé}}$.
$\lambda = 0{,}589\mu$	$11°40'$	$-19°30'$	$1{,}20 \times 10^{-3}$	$2{,}32\ A$	$30°10'$	$0{,}52 \times \frac{10^{-3}}{A}$.

Cette détermination de la différence de phase de Sissingh nous permet en tout cas de juger d'avance quels angles devront être choisis dans les recherches ultérieures.

§ 40. *Résultats d'autres observateurs.* M. Sissingh a soumis au calcul les observations de M. Kundt [1]) touchant la réflexion équatoriale sur le nickel. Le résultat de ce calcul, effectué avec les constantes optiques de M. Quincke, se trouve rapporté dans le tableau suivant.

---

[1]) Kundt, *Wiedem. Ann.* Bd. 23, p. 241, 1884.

Calcul des observations de M. Kundt touchant la réflexion équatoriale sur le nickel, les valeurs des constantes optiques étant $I = 76°7'$; $H = 32°9'$.

Angle d'incid.	ψ^m_{ia}	ψ^m_{ip}	$m_i - 180°$	$\mu_i 10^{-3}$	$\frac{\mu \text{ obs.}}{\mu \text{ calc.}}$	m obs. $- m$ calc.	
30°6′	— 1,7	+ 1,8	— 3°50′	0,21	0,55	86°15′	
40°0′	— 2,7	+ 1,4	— 64°18′	0,77	1,55	23°18′5	
50°0′	— 4.7	+ 0,3	— 64°46′	1,39	2,05	19°15′5	(XXXVII)
61°30′	— 4,2	— 0,7	— 52°21′	0,90	1,91	25°31′5	
65°18′	— 3,8	— 2,2	— 53°18′	0,84	1,42	21°48′5	
75°0′	— 1,1	— 1,9	— 49°54′	0,23	0,44	15°19′	
					1,32	21°3′.	

On ne peut pas conclure de cette série qu'il existe une phase de Sissingh constante entre les mêmes limites, que dans le cas du cobalt et du fer. Si l'on accepte l'existence de l'analogie et un accord avec la théorie de Goldhammer on obtient, pour la différence de phase de Sissingh, des valeurs comprises entre 15° et 25° (à l'exception d'une seule valeur de 86°), et dont la moyenne est égale à 21°. M. Kundt n'a d'ailleurs pas effectué de rotations à zéro, qui méritent d'ordinaire la préférence dans une détermination de phase.

§ 41. Les observations de M. Drude [1]), publiées tout récemment, donnent par le calcul ce qui suit:

Calcul des observations de M. Drude sur le nickel. Réflexion équatoriale. Lumière blanche.

60°	— 48°22′	— 79°14′	$0{,}65 \times 10^{-3}$	$0{,}595 A$	30°52′	$1{,}08 \times \frac{10^{-3}}{A}$.	
65°	— 46°3′	— 76°16′	$0{,}84 \times 10^{-3}$	$0{,}592 A$	30°12′	1,42 „	(XXXVIII).
75°	+ 11°41′	— 66°19′	$0{,}30 \times 10^{-3}$	$0{,}512 A$	78°	0,59 „	
80°	— 8°42′	— 58°11′	$0{,}17 \times 10^{-3}$	$0{,}420 A$	49°29′	0,40 „	

J'ai adopté pour les constantes optiques les valeurs $I = 76°1'$; $H = 31°41'$.

[1]) Drude, *Wied. Ann.*, Bd. 46, p. 398, 1892.

Les valeurs de S oscillent entre 30° et 78°, si l'on écarte cette dernière valeur, on obtiendrait de la même manière que dans les expériences de M. Kundt, pour valeur moyenne de S 36°. Cependant cette valeur diffère aussi très-notablement de la valeur de S tirée de la théorie même de M. Drude, qui est d'environ 60° (voir § 34). Des détermination nouvelles dont s'occupe en ce moment M. Wind contribueront certainement á décider de la constance et de la valeur de la phase de Sissingh. L'examen des minéraux magnétiques démontrerait-il également une phase de Sissingh?

CHAPITRE CINQUIÈME.

Conclusion.

§ 42. Je me permettrai, en terminant, d'indiquer dans quelle direction pourraient se mouvoir les recherches futures.

Il semble certainement tout donné d'étendre les recherches relatives à la constance de la phase de Sissingh au cas de la réflexion polaire normale. On peut, sauf certaines modifications, faire encore usage des méthodes employées pour d'autres d'incidences, quand on possède une plaque biréfringente, taillée parallèlement à l'axe, d'une grande perfection. Il ne faut pas que cette plaque diminue la netteté du petit nuage qui sert de point de repère. Une plaque de quartz se trouve préparée dans ce but et les recherches peuvent donc être continuées sans retard. Du moment que la phase est déterminée, pour le cobalt, à l'incidence normale, on peut combiner les résultats de M. Dubois, destinés à constater l'aimantation sous un angle d'incidence nul, avec nos résultats, relatifs à d'autres incidences. L'étude de la

réflexion équatoriale, qui doit encore compléter ces recherches, offrira moins de difficultés pour le cobalt que pour le fer, parce que la détermination de la phase est, chez ce métal, moins sujette à des erreurs d'observation, ce qui est en rapport avec la valeur de la différence de phase de Sissingh. On pourrait alors d'abord se contenter, pour le fer et le nickel, de mesures faites sous un seul angle déterminé, pour des lumières de couleur différentes. Ces recherches menées à bonne fin, on se demandera jusqu'à quel point l'étude de la lumière réfléchie et transmise par des couches minces de différente épaisseur des trois métaux fortement magnétiques, seules ou en superposition avec des couches non magnétiques, fera surgir des points de vue nouveaux. L'étude approfondie des sujets indiqués, qui peut sans doute contribuer puissamment à étendre nos connaissances sur la propagation de la lumière dans les métaux, réclamera toutefois plus de deux années de travail.

Ce serait ensuite une séduisante étude, de rechercher s'il apparaît une absorption magnéto-optique particulièrement intense pour certaines radiations de longueur d'onde déterminée (y compris l'infra-rouge et l'ultra-violet). L'avenir apprendrait-il peut être, qu'il est possible de déduire de ces raies d'absorption quelques données relatives à la durée de vibration des courants moléculaires d'Ampère, considérés comme mouvement d'ions?

En terminant ce travail j'ai à remplir l'agréable devoir de remercier M. le professeur Kamerlingh Onnes, directeur du laboratoire de physique de Leyde, non seulement de ses précieux conseils, mais aussi de la liberalité avec laquelle il a mis à ma disposition les ressources du cabinet de physique.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

LA MÉTHODE DE DARBOUX POUR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, NON LINÉAIRES, DU SECOND ORDRE.

PAR

H. A. W. SPECKMAN.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1.

Dans les premières années qui suivirent la publication du travail d'Ampère [1]) sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 2e ordre, il ne fut pas ajouté grand' chose à la théorie développée par cet auteur. Plus tard, Bour [2]) fit voir comment, dans certains cas, au lieu d'une solution complète avec cinq constantes, il suffisait d'en connaître trois pour pouvoir déterminer la solution générale; et ce cas a été traité aussi par Imschenetsky [3]). Toutefois les recherches sur l'intégration de systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre furent poursuivies dans toutes les directions, et sensiblement menées à bonne fin; si bien que, s'appuyant sur cette base, on fut à même d'entreprendre de nouvelles recherches sur l'intégrabilité de l'équation du second ordre. De 1870 jusqu'à ce jour, on a développé successivement un grand nombre de méthodes dont plusieurs ont un principe

[1]) Ampère, Journal de l'Ecole Polytechnique. Cah. 17 et 18.

[2]) Bour, Journal de l'Ecole Polytechnique. Cah. 39.

[3]) Imschenetsky, Grünerts Archiv. Bd. 54.

commun, et dont les rapports seront ici examinés de plus près. Comme M. Darboux a droit à la priorité de l'idée fondamentale, nous croyons devoir donner à cette méthode commune le nom de méthode de Darboux.

La méthode, dont M. Darboux a donné un court aperçu dans les Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, année 1870, tome 7, s'applique à des équations aux dérivées partielles de chaque ordre et pour un nombre quelconque de variables.

Nous allons l'exposer dans ses grandes lignes.

M. Darboux a essayé de trouver, pour certaines catégories d'équations aux dérivées partielles du second ordre ou d'ordre plus élevé, des équations différentielles partielles du n^e ordre à fonction arbitraire, qui soient satisfaites par la solution générale de l'équation donnée. Elles forment donc avec l'équation primitive un système d'équations simultanées aux dérivées partielles. Si celles-ci sont en nombre suffisant, nous pouvons exprimer les valeurs des dérivées partielles de l'ordre le plus élevé en fonction de celles d'ordre inférieur et des fonctions arbitraires; et dans ce cas, les équations

$$d\,z_{p.q} = z_{p+1.q}\,dx + z_{p.q+1}\,dy \qquad p + q \leq n - 1 \text{ [1]}$$

forment un système d'équations différentielles totales qui est intégrable et par lequel le problème peut être considéré comme résolu.

M. Darboux indique deux manières de trouver ces équations auxiliaires. Nous allons les examiner l'une et l'autre.

Premièrement il remarque que si une équation aux dérivées partielles, non linéaire et du second ordre

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

est différentiée totalement par rapport à x ou y, on obtient de nouvelles équations, linéaires par rapport aux plus hautes dérivées de z, savoir:

[1]) On a employé la notation $\dfrac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = z_{p.q}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \quad \ldots (2).$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad \ldots (3).$$

et dans lesquelles $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ont une signification facile à comprendre.

Si l'on introduit à présent de nouvelles variables indépendantes, savoir x et α, α étant une fonction encore indéterminée de x et y, on a les relations

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = q\frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{\partial p}{\partial \alpha} = s\frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{\partial q}{\partial \alpha} = t\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial s}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial t}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x} \end{array}\right\} (4).$$

Par cette introduction de nouvelles variables on peut, en faisant usage des relations (4), changer l'équation (3) en

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right\} +$$

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha}\left\{\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\right\} = 0 \quad \ldots\ldots (5).$$

On peut maintenant, dit M. Darboux, pour des raisons qu'il est inutile de répéter ici, poser

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

et changer ainsi (5) en

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + 0,$$

équation qui devient, en vertu de la relation (6):

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x} \right\} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0. \quad \ldots\ldots (7)$$

Il déduit de même de l'équation (2):

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \right\} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \text{ [1])}. \quad \ldots\ldots (8)$$

Pour intégrer l'équation (1), il obtient donc le système suivant d'équations différentielles:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{d r}{d x} + \dfrac{1}{m_1}\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{d s}{d x} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{d s}{d x} + \dfrac{1}{m_1}\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{d t}{d x} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{d y}{d x} = m_1, \ \dfrac{d z}{d x} = p + m_1 q, \ \dfrac{d p}{d x} = r + m_1 s, \ \dfrac{d q}{d x} = s + m_1 t, \end{cases}$$

dans lesquelles m_1 est une racine de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial r} m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (9).$$

et où existe en outre la relation $f = 0$.

On obtient un second système en prenant pour m_1 la seconde racine de l'équation du second degré en m. Nous appelons cette dernière *l'équation caractéristique*. Boole [2]) l'a déjà trouvée à l'aide du calcul des variations et il dit qu'elle est en relation intime avec les arguments des fonctions arbitraires. Ampère aussi en avait déjà fait mention.

En ce qui concerne l'intégration du système I, M. Darboux dit qu'elle est en général impossible, puisque ce système

---

[1]) C'est par erreur que M. Darboux écrit cette équation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

[2]) Treatise on differential equations. Suppl. vol.

se compose de 6 équations à 7 variables indépendantes; de sorte que la solution générale ne peut être obtenue. Mais si le système admet pour une des valeurs de m deux combinaisons intégrables, $u = c_1$ et $v = c_2$, alors $u = \varphi(v)$ est une équation différentielle partielle du second ordre avec une fonction arbitraire, qui existe simultanément avec $f = 0$. Si l'on peut trouver aussi pour la seconde valeur de m deux combinaisons intégrables analogues, alors le problème est résolu.

Mais si tel n'est pas le cas, on pourra former de semblables systèmes où entreront les dérivées du 3e ordre de x et de y par rapport à z. Ce nouveau système pourra admettre alors quelques combinaisons intégrables. S'il n'en était pas ainsi on pourrait avoir recours aux dérivées du 4e ordre, et ainsi de suite.

La seconde méthode dont M. Darboux fait mention dans son travail, pour déterminer des équations aux dérivées partielles du second ordre et d'ordre plus élevé, satisfaites par l'intégrale générale de l'équation donnée, conduit plus rapidement au but.

Il pose le problème suivant:

„Trouver une équations différentielle $v = a$ du ne ordre, admettant, en commun avec la proposée [1]), une solution contenant au moins une fonction arbitraire,'' et il continue comme suit:

„Pour cela, il suffit de remarquer que la proposée, différentiée $n - 1$ fois, donne n équations contenant les dérivées d'ordre $n + 1$, au nombre de $n + 2$. L'équation $v = a$, différentiée successivement par rapport à x et à y, donne deux équations contenant, elles aussi, les dérivées d'ordre $n + 1$. On a donc en tout $n + 2$ équations, contenant linéairement les dérivées d'ordre $n + 1$, et qui déterminent ces $n + 2$ dérivées en fonction des dérivées d'ordre inférieur, si les deux équations différentielles dont on cherche la solution commune sont prises arbitrairement. Mais ici cela ne doit pas être; sans cela les dérivées d'ordre supérieur à $n + 1$ se détermineraient toutes, comme les dérivées

[1]) Du 2e ordre $f = 0$..

d'ordre $n+1$, en fonction des dérivées d'ordre moindre, puisqu'une fois obtenues toutes les dérivées d'ordre $n+1$ en fonction des dérivées d'ordre inférieur, on n'aurait qu'à déterminer toutes les équations qui donneraient chacune de ces dérivées pour avoir les dérivées d'ordre supérieur; et la solution commune, si elle existait, ne pourrait contenir tout au plus qu'un *nombre limité de constantes arbitraires.* Il faut donc que ces $n+2$ équations, contenant linéairement les $n+2$ dérivées d'ordre $n+1$, forment un système indéterminé, ce qui donne deux équations de condition. Comme deux des équations contiennent les dérivées de v, $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial p}, \frac{\partial v}{\partial q} \ldots$, les relations de condition doivent être considérées comme deux équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles doit satisfaire la fonction v. Ces équations sont homogènes et du *second* degré par rapport aux dérivées." Voilà ce que dit M. Darboux de sa seconde méthode.

Examinons maintenant le rapport qui existe entre les équations, obtenues par la première et la seconde méthode, et auxquelles se réduit l'intégration de $f=0$. Nous verrons que ces équations, obtenues par l'une et l'autre méthode, sont identiques, et peuvent se transformer l'une dans l'autre.

---

§ 2.

Soit encore l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

et soit $v=a$ une nouvelle équation différentielle du 2e ordre, qui ait avec l'équation donnée une solution commune et une fonction arbitraire au moins. Tâchons maintenant de déterminer une telle équation selon la deuxième méthode de Darboux.

A cet effet, différentions une seule fois les équations $f=0$ et $v=a$ aussi bien par rapport à x que par rapport à y; nous obtiendrons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0.$$

Puisqu'on a supposé qu'il existait une solution commune $z=\varphi\ (x, y)$, on aura nécessairement

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial y}$$

de sorte que les équations se changent en

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}z_{3.0}+\frac{\partial f}{\partial s}z_{2.1}+\frac{\partial f}{\partial t}z_{1.2}=0, \quad \ldots \quad (2).$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial r}z_{3.0}+\frac{\partial v}{\partial s}z_{2.1}+\frac{\partial v}{\partial t}z_{1.2}=0, \quad \ldots \quad (3).$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}z_{2.1}+\frac{\partial f}{\partial s}z_{1.2}+\frac{\partial f}{\partial t}z_{0.3}=0, \quad \ldots \quad (4).$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial r}z_{2.1}+\frac{\partial v}{\partial s}z_{1.2}+\frac{\partial v}{\partial t}z_{0.3}=0. \quad \ldots \quad (5).$$

Déterminons maintenant les équations de condition, auxquelles devront satisfaire les équations (2), (3), (4) et (5) pour former un système indéterminé, si nous prenons comme inconnues les dérivées de z du 3e ordre. Eliminons $z_{3.0}$ entre (2) et (3) et $z_{0.3}$ entre (4) et (5), nous aurons

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r}\right)z_{2.1}+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}\right)z_{1.2}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)z_{2.1}+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)z_{1.2}=0.$$

Pour que les équations dépendent l'une de l'autre, il faut qu'on ait les relations

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}, \quad \ldots \quad 6).$$

qui constituent les deux équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré, auxquelles conduit la méthode de Darboux, pour le cas où l'équation $v = a$, qu'on veut obtenir, est du second ordre.

Nous allons maintenant, *en premier lieu*, transformer les équations (6) en deux systèmes d'équations aux dérivées partielles, *linéaires* pour les dérivées de v, et ramener ainsi la détermination de l'intégrale de (6), si elle existe, à l'intégration de systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et du premier ordre; et *ensuite* déterminer l'intégrale de l'équation (1) au moyen des équations $v = a$.

Multiplions à cet effet le numérateur et le dénominateur du second membre des égalités (6) par $\lambda \frac{\partial f}{\partial t}$, et les numérateur et dénominateur du troisième membre de (6) par $-\lambda^2 \frac{\partial f}{\partial r}$, λ étant un facteur indéterminé; puis additionnons les numérateurs de ces deux membres ainsi que les dénominateurs; nous obtiendrons comme quatrième membre des égalités (6)

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\left\{\lambda \frac{\partial f}{\partial s} - \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right\}\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s} + \lambda^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial t}}{-\lambda \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}\left\{\lambda \frac{\partial f}{\partial t} - \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial s}\right\}}. \quad (7)$$

Déterminons maintenant la valeur de λ de telle manière qu'elle soit une racine de l'équation

$$\lambda^2 \frac{\partial f}{\partial r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

alors (7) devient

$$-\frac{1}{\lambda}\,\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} + \lambda^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} + \lambda^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial t}} = -\frac{1}{\lambda},$$

et (6) se trouve ainsi ramené aux *deux* systèmes:

$$\text{II.}\ \frac{\dfrac{\partial v}{\partial r}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial f}{\partial r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial v}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial f}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial s}-\dfrac{\partial v}{\partial s}\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial t}}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial s}-\dfrac{\partial v}{\partial s}\dfrac{\partial f}{\partial t}}=-\frac{1}{m},$$

où m acquiert successivement les valeurs des deux racines de l'équation

$$m^2\frac{\partial f}{\partial r}-m\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8a.)$$

laquelle est l'équation caractéristique (9) du § 1. Réduisons les systèmes II à une forme plus simple.

Désignons de nouveau par m_1 et m_2 les racines de ($8a$), et donnons, dans II, à m la valeur m_1, il vient

$$\text{II}a\ \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+m_2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial r}}\frac{\partial v}{\partial r}+m_2\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial v}{\partial t},\\ &\frac{\partial v}{\partial r}m_1^2-\frac{\partial v}{\partial s}m_1+\frac{\partial v}{\partial t}=0.\end{aligned}\right.$$

On aura de la même manière, en remplaçant dans II, m par m_2:

$$\text{II}b\ \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+m_1\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial r}}\frac{\partial v}{\partial r}+m_1\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial v}{\partial t},\\ &\frac{\partial v}{\partial r}m_2^2-\frac{\partial v}{\partial s}m_2+\frac{\partial v}{\partial t}=0.\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer l'intégrale générale, nous avons maintenant le théorème suivant:

Soient $v_1=c_1$ une intégrale de IIa et $v_2=c_2$ une intégrale de IIb, de manière qu'on puisse tirer les valeurs de r, s et t des équations $f=o$, $v_1=c_1$ et $v_2=c_2$, ces valeurs réduiront les équations:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy, \quad dz = p\,dx + q\,dy$$

à un système d'équations différentielles totales et donneront ainsi une intégrale de l'équation $f = 0$.

En effet, les équations (6) ont été obtenues en supposant que

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

d'où il résulte que

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad \text{et} \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

sont des équations différentielles totales; et puisqu' alors $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, cela sera aussi le cas pour $dz = pdx + qdy$.

Si on peut trouver deux intégrales de chacun des systèmes IIa et IIb, savoir v_1 et u_1 pour IIa, et v_2 et u_2 pour IIb, alors $\varphi_1\,(v_1, u_1) = 0$ et $\varphi_2\,(v_2, u_2) = 0$ seront aussi des intégrales, la première de IIa et la seconde de IIb, et ainsi sera obtenue la résolution générale de l'équation $f = 0$.

Nous allons fournir encore une preuve directe de la proposition énoncée plus haut.

Si l'on différentie les équations $f = 0$ et $v_1 = c_1$ par rapport à x, on obtiendra, après élimination de $\frac{\partial r}{\partial x}$:

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

De même, en différentiant par rapport à y et éliminant $\frac{\partial t}{\partial y}$, on a:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial v_1}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial s}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Si on multiplie (9) par— m_1 et qu'on en retranche (10), on aura, en vertu des relations II

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial y}\right)+$$
$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v_1}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}-\frac{\partial s}{\partial y}\right)=0 \quad . \ . \ . \ . \ (11)$$

On déduit de même des équations $f=0$ et $v_2=a_2$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial v_2}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial y}\right)+$$
$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v_2}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}-\frac{\partial s}{\partial y}\right)=0 \quad . \ . \ . \ . \ (12)$$

Si dans les équations (11) et (12) on prend maintenant pour inconnues

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial t}{\partial x}-\frac{\partial s}{\partial y}\right),$$

le déterminant des coefficients doit être nul, ou bien il faut que

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial y},$$

et dans ce dernier cas le théorème serait démontré.

Examinons maintenant quelle signification il faut attribuer au déterminant nul, que l'on peut mettre sous la forme [1])

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial v_1}{\partial r} & \frac{\partial v_1}{\partial s} & \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial r} & \frac{\partial v_2}{\partial s} & \frac{\partial v_2}{\partial t} \end{vmatrix} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

[1]) Speckman „Integratie van partieele diff. vergelijkingen van hoogere orde" pag. 73, 199. Groningen 1889. Ce cas est traité là pour des équations aux dérivées partielles du n^e ordre.

En vertu de (8a), IIa et IIb on a les relations

$$\frac{\partial f}{\partial r} m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial r} m_2{}^2 - \frac{\partial v_1}{\partial s} m_2 + \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial r} m_1{}^2 - \frac{\partial v_2}{\partial s} m_1 + \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

où m peut avoir pour valeurs m_1 aussi bien que m_2.

Posons

$$\frac{\partial v_1}{\partial r} m_1{}^2 - \frac{\partial v_1}{\partial s} m_1 + \frac{\partial v_1}{\partial t} = P,$$

on conclura de ceci et de deux des égalités (14), que (13) est égal à

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial v_2}{\partial r}\right).$$

Si donc le déterminant est nul, il vient soit

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial v_2}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial v_2}{\partial r} = 0, \text{soit} \frac{\partial v_1}{\partial r} m_1{}^2 - \frac{\partial v_1}{\partial s} m_1 + \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0.$$

Dans le premier cas

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v_2}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial v_2}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial v_2}{\partial t}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Dans le second cas on a, conformément à (14), que $m_1 = m_2$ ou que

$$\frac{\partial v_1}{\partial r}(m_1 + m_2) + \frac{\partial v_1}{\partial s} = 0 \text{ et } \frac{\partial v_1}{\partial r} m_1 m_2 = \frac{\partial v_1}{\partial t}$$

et de cette dernière hypothèse il suit, à cause de la première des équations (14),

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial v_1}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial v_1}{\partial t}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

On pourra maintenant satisfaire aux équations (15) ou (16) si une des fonctions v est une fonction de f, ou si elle ne renferme pas de r, s et t, ou bien si entre cette fonction et $f = 0$ on peut éliminer les r, s et t.

Dans le premier cas, v n'est pas une intégrale dans l'acception actuelle. Le second cas, auquel on peut réduire le troisième par l'élimination entre $v = 0$ et $f = 0$ de la forme en r, s et t, ne peut pas se présenter en vertu de notre supposition de la page 311, qu'on puisse tirer les valeurs de r, s et t des équations $f = 0$, $v_1 = c_1$ et $v_2 = c_2$. Le déterminant (13) ne s'annule donc que si l'équation caractéristique a deux racines égales.

Nous développerons, dans la deuxième partie de ce travail, une méthode pour déterminer, dans ce cas, l'intégrale générale.

Etablissons à présent les rapports entre les systèmes I § 1 et II § 2. A cet effet, multiplions la seconde des équations IIa par un facteur indéterminé λ, et ajoutons-la à la première; nous aurons

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + m_2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left\{\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1{}^2\lambda\right\}\frac{\partial v}{\partial r} +$$

$$- m_1\lambda\frac{\partial v}{\partial s} + \left\{\frac{m_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} + \lambda\right\}\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Le système auxiliaire de Lagrange est pour cette équation:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m_2} = \frac{dz}{p + m_2 q} = \frac{dp}{r + m_2 s} = \frac{dq}{s + m_2 t} =$$

$$\frac{-\,dr}{\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1{}^2\lambda} = \frac{ds}{m_1\lambda} = \frac{-\,dt}{\frac{m_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} + \lambda},$$

et après élimination de λ:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m_2}=\frac{dz}{p+m_2\,q}=\frac{dp}{r+m_2\,s}=\frac{dq}{s+m_2\,t}=$$
$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial r}\left(dr+m_1\,ds\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial r}\left(ds+m_1\,dt\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}.$$

On déduit un système analogue de II*b*.

On peut donc remplacer le système II par les suivants:

$$\left.\begin{aligned} dy&=m_1\,dx\,,\\ \left(dr+m_2\,ds\right)\frac{\partial f}{\partial r}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx&=0\,,\\ \left(ds+m_2\,dt\right)\frac{\partial f}{\partial r}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx&=0\,,\end{aligned}\right\}\ \text{III}a$$

$$\left.\begin{aligned} dy&=m_2\,dx\,,\\ \left(dr+m_1\,ds\right)\frac{\partial f}{\partial r}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx&=0\,,\\ \left(ds+m_1\,dt\right)\frac{\partial f}{\partial r}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx&=0\,.\end{aligned}\right\}\ \text{III}b$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}m_2-\frac{\partial f}{\partial s}m+\frac{\partial f}{\partial t}=0\,,$$

$$dz=p\,dx+q\,dy,\qquad dp=r\,dx+s\,dy,\qquad dq=s\,dx+t\,dy.$$

Or ceci est le système I de Darboux, si nous passons d'équations différentielles à une variable dépendante, à savoir x, à des équations différentielles totales; ainsi se trouve démontrée l'équivalence des systèmes I et II.

---

§ 3.

Occupons nous maintenant de quelques méthodes pour intégrer une équation aux dérivées partielles du second ordre ou d'ordre supérieur, qui conduisent toutes aux systèmes I et II des paragraphes précédents.

Dans un mémoire, publié en Avril 1871, M. Falk [1]) arriva au système III. Il essaya en premier lieu d'intégrer une équation, linéaire pour les dérivées du n^e ordre, en appliquant la même méthode qui fut employée par Boole pour celles du 2e ordre; il arriva ainsi à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, et de là à un système d'équations différentielles totales. Pour intégrer maintenant une équation aux dérivées partielles non linéaire, il la différentie totalement par rapport à x et à y, et applique à présent à ces équations, linéaires pour les plus hautes dérivées, la même méthode que pour les équations linéaires. La différence entre la première méthode de Darboux et celle de Falk consiste donc uniquement en ce que M. Darboux appliquait à l'équation différentiée du 2e ordre la méthode, donnée par Ampère pour l'équation linéaire, tandis que M. Falk employait la méthode de Boole.

Toutefois, le développement indiqué par Falk n'est pas clair; il appliquait simplement des formules, obtenues pour intégrer des équations linéaires pour les plus hautes dérivées, à une équation différentiée non linéaire, sans indiquer comment on pouvait trouver ainsi une intégrale générale ou arriver à une méthode générale d'intégration.

L'idée de M. Darboux a été mise en relief d'une manière plus saillante et plus claire dans un mémoire de M. A. Picart [2]) „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre", dont un extrait sommaire seul a été publié.

Il cherche, pour l'équation du second ordre, deux autres équations du second ordre telles, que les valeurs de r, s et t, déterminées à l'aide de ces trois équations, satisfassent à

$$\frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx}, \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx}.$$

---

[1]) Falk. »On the integration of partial differential equations of the n^{th} order". Nova Acta Regiae Soc. Ups. Ser. III, vol. 8, 1872.

[2]) Picart, Comptes Rendus LXXVIII, 882—884, 1874.

L'intégration du systéme

$$dz = p\,dx + q\,dy,\; dp = r\,dx + s\,dy,\; dq = s\,dx + t\,dy$$

qui alors est intégrable, donne en général une solution complète à 5 constantes.

Pour déterminer les deux équations du second ordre nécessaires, il trouve deux systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, qu'il ne fait pas connaître, mais qui doivent être les équations du système II.

La méthode de Picart a donc la même base que la deuxième méthode de Darboux.

C'est M. Hamburger [1]) qui le premier a dérivé d'une manière détaillée le système II, pour une équation du n^e ordre. Sa méthode concorde avec celle de Picart.

Il recherche, pour une équation aux dérivées partielles du n^e ordre, d'autres équations aux dérivées partielles du même ordre, telles que les dérivées du n^e ordre qu'on en déduit fassent des équations

$$d\,z_{p.q} = z_{p+1.q}\,dx + z_{p.q+1}\,dy, \quad (p + q = n - 1),$$

un système d'équations différentielles totales.

Pour l'équation

$$f\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (1)$$

la méthode est appliquée comme suit:

En différentiant totalement l'équation (1) par rapport à x et à y, on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \,.\,.\,.\,.\,. \quad (2).$$

équations qui renferment nécessairement les relations

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}, \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (3).$$

[1]) Hamburger. Journal de Crelle. Bd. 93. 1882.

Puis on a:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy, \quad ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy, \quad dt = \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy,$$

équations qui, à cause de (3), se changent en

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial x} dy, \quad ds = \frac{\partial r}{\partial y} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy, \quad dt = \frac{\partial s}{\partial y} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy.$$

Multipliant par un facteur indéterminé m et ajoutant, on obtient

$$\left.\begin{aligned} dr + mds &= \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial x}\left(dy + mdx\right) + m \frac{\partial t}{\partial x} dy, \\ ds + mdt &= \frac{\partial r}{\partial y} dx + \frac{\partial s}{\partial y}\left(dy + mdx\right) + m \frac{\partial t}{\partial y} dy. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Déterminons maintenant m de manière que les équations (2) et (4), indépendantes des dérivées $\frac{\partial r}{\partial x}$ etc., soient une conséquence l'une de l'autre. Il faut alors les relations

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial r}} = \frac{dy + mdx}{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{m\,dy}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{dr + m\,ds}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{ds + m\,dt}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \quad \ldots\ldots (5)$$

Eliminant m entre les trois premiers membres, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad \ldots\ldots (6)$$

Soient μ_1 et μ_2 les racines de cette équation, d'où, d'après (5), $\mu_1 \mu_2 = m \frac{dy}{dx}$, et m_1 et m_2 les valeurs de m qui correspondent aux racines $\frac{dy}{dx} = \mu_1$ et μ_2, on aura

$$m_2 = \mu_1 \text{ et } m_1 = \mu_2,$$

ce qui change (5) et (6) en

$$\left.\begin{aligned} \left(dr + m_2\,ds\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx &= 0, \\ \left(ds + m_2\,dt\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx &= 0, \\ dy &= m_1\,dx, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(dr + m_1\, ds\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) d\,x = 0,\\ \left(ds + m_1\, dt\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\,x = 0,\\ dy = m_2\, dx,\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}\, m^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\, m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\ ,$$

$$dz = p\, dx + q\, dy\ ,\quad dp = r\, d\,x + s\, dy\ ,\quad dq = s\, dx + t\, dy\ ,$$

systèmes qui ne sont autre chose que III*a* et III*b*.

Soit, à présent, $u = c$ une intégrale de (7); si nous différentions totalement $u = c$ et que nous substituions aux différentielles des variables leurs valeurs tirées de (7), cette équation devra être identiquement nulle et nous aurons:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{m_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial u}{\partial t}\right\} d\,x +$$

$$- \frac{1}{m_2}\left\{ m_2^{\,2}\frac{\partial u}{\partial r} - m_2\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\right\} d\,s = 0\ ,$$

équation qui ne peut être identique que lorsque chacun des coefficients de $d\,x$ et $d\,s$ est nul séparément; d'où il résulte que

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\frac{\partial f}{\partial r} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{m_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\, m_2^{\,2} - \frac{\partial u}{\partial s}\, m_2 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0\ ,$$

ce qui est de nouveau le système II.

M. Winckler [1]) arrive au même système III en appliquant la méthode de Monge pour les équations linéaires dans les plus hautes dérivées, à l'équation du second ordre, différentiée

[1]) Winckler, »Ueber eine neue Methode zur Integration partieller Differential-Gleichungen zweiter Ordnung". *Sitzb. der K. Akad. der Wissenschaften.* Wien, abth. II, bd. 88 et bd. 89, 1883 et 1884.

par rapport à x ainsi que par rapport à y. Des équations nouvelles ainsi obtenues on pourra alors, à cause de

$$d z_{p.q} = z_{p+1.q}\, d x + z_{p.q+1}\, d y\,, \quad p + q \overline{\overline{<}} 2,$$

déduire des intégrales.

Cette méthode est donc tout à fait conforme à la première méthode de Darboux et conduit directement au système III.

M. Julius König [1]) arrive également au système II en recherchant des équations du second ordre qui donnent, avec l'équation donnée du second ordre, pour r, s et t des valeurs qui fassent des équations

$$d p = r\, d x + s\, d y, \quad d q = s\, d x + t\, d y, \quad d z = p\, d x + q\, d y$$

un système d'équations différentielles totales.

La méthode concorde avec celle de Picart et par suite avec la seconde dérivation de Darboux.

Soit donnée l'équation

$$f\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$ [2]),

et soient $u = a$, $v = b$ les équations à déterminer, on obtiendra en différentiant totalement par rapport à x et à y:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

---

[1]) J. König, „Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Math. Annalen*, bd. 24, 1884.

[2]) M. König effectue les opérations suivantes sur l'équation de la forme $r = f\,(x, y, z, p, q, s, t)$, u et v étant supposées ne pas renfermer r.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

On pourra déduire de ces équations

$$\frac{\partial r}{\partial y}, \ \frac{\partial s}{\partial y}, \ \frac{\partial s}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Déterminons maintenant u et v de manière qu'on ait

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x},$$

alors u et v satisferont aux conditions posées.

Résolvant et égalant ces deux valeurs, on obtient les deux relations suivantes:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix},$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Il est admis ici que le déterminant qui était le dénominateur commun de $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial t}{\partial x}$ ne disparaît pas; si tel est le cas, l'équation caractéristique avait alors, d'après le § 2, deux racines égales, et l'intégrale ne peut être obtenue de cette manière.

Les relations ci-dessus entre les dérivées f, u et v forment

deux équations du premier ordre et du second degré, qui déterminent u et v en fonction de x, y, z, p, q, r, s, t. Pour que ces équations soient algébriquement équivalentes, il faut que les coefficients des diverses dérivées de v soient proportionnels dans les deux équations, d'où il suit que

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}=$$

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial s}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}=$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}.$$

Les trois premières égalités sont celles de (6) § 2.

Les deux suivantes sont des conséquences mathématiques des trois premières.

Pour le cas où le système II*a* ou II*b* n'aurait pas d'intégrales renfermant r, s et t, et n'admettrait ainsi aucune résolution complète, par où on pourrait, par la variation des constantes, en déduire une solution générale, M. König développe une nouvelle méthode pour arriver à la solution complète. Elle n'est toutefois pas en rapport direct avec celle qui a été indiquée plus haut.

Enfin, M. Victor Sersawy [1]) a dérivé le système III de la même manière que M. Hamburger, afin de pouvoir intégrer l'équation aux dérivées partielles du second ordre.

---

[1]) Sersawy, „Die Integration der partiellen differential Gleichung zweiter Ordnung". *Denkschriften der Kaiserlichen Acad. van Wissenschaften.* Wien. Math. Phys Abth. bd. 49, 1885.

En prenant alors x pour seule variable indépendante, le système III se transforme dans le système I. Au lieu d'appliquer maintenant la règle de Jacobi et de chercher dans quel cas chacun des systèmes Ia et Ib admet des intégrales, et d'arriver ensuite à une intégrale générale par la résolution de r, s et t, il intègre le système Ia en considérant l'une des variables dépendantes, savoir s, comme une fonction de x provisoirement indéterminée, et en la déterminant ensuite à l'aide du système Ib, ce qui doit ramener l'intégration à une équation differentielle en x et en cette variable dépendante. Si celle-ci a été déterminée en intégrant l'équation differentielle ordinaire, le système Ia peut être intégré complètement, et de ces intégrales on pourra ensuite, en rapport avec le système Ib, trouver l'intégrale générale par un système d'équations de Pfaff.

Bien que la méthode d'intégration de Sersawy soit beaucoup plus générale que celle de Darboux, et comprenne celle-ci tout entière comme cas particulier, elle donne lieu à des calculs compliqués, même pour des cas simples tels que l'équation $r - t = 0$; de sorte que, lorsque le système Ia et Ib est intégrable, la dérivation de l'intégrale générale d'après la méthode de Darboux mérite la préférence.

Le nombre d'applications de la théorie des équations différentielles du second ordre développée ici est restreint. M. Winkler, dans le travail cité plus haut, appliquait cette théorie à quelques équations connues très-simples, linéaires pour les plus hautes dérivées de la variable dépendante.

Les avantages de la méthode de Darboux sur les autres furent démontrés par M. De Boer [1]), qui intégra ainsi d'une manière générale l'équation $f\,(r, s, t) = 0$. Il dériva l'équation aux dérivées partielles la plus générale de cette forme, qui peut être integrée, par la méthode développée, et détermina, les intégrales des systèmes de Darboux. Il indiqua

---

[1]) Dr. F. De Boer. *Versl. d. Kon. Acad. v. Wetenschappen. Afd. Natuurkunde.* 3de Reeks. Deel VIII, 1891. Voir l'article suivant.

aussi comment à l'aide des intégrales trouvées, qui comprenaient es fonctions arbitraires, on pouvait, en intégrant les équations différentielles

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

qui devaient être et étaient réellement des équations différentielles totales, déterminer l'intégrale générale. Cette intégration a été effectuée d'une manière complète, sauf pour un seul cas particulier où par suite de la grande complication de l'intégrale finale, il a fallu cesser les calculs.

DEUXIÈME PARTIE.

Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, dont l'équation caractéristique a deux racines égales.

§ 1.

Soit à intégrer l'équation

$$f(x, y, z, p, q, r, s. t) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nous avons ramené cette intégration à celle du système II, § 2 de la première partie, savoir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r} m_1^{\;2} - \frac{\partial u}{\partial s} m_1 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ ou } \Delta_1 u = 0, \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} \frac{\partial u}{\partial r} + m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ ou } \Delta_2 u = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

où m_1 et m_2 sont les racines de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial r} m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Le plus grand nombres d'intégrales communes du système (2) est de cinq, eu égard à la relation (1).

Représentons les équations (2) symboliquement par $\Delta_1 u = 0$ et $\Delta_2 u = 0$; alors la condition pour qu'il y ait ce nombre d'intégrales est que

$$(\Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1) u = 0,$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Delta_1 m_2 + q \frac{\partial u}{\partial z} \Delta_1 m_2 + (m_1^2 - m_1 m_2 + s \Delta_1 m_2) \frac{\partial u}{\partial p} +$$

$$(m_2 - m_1 + t \Delta_1 m_2) \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial r} \Delta_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} - \frac{\partial u}{\partial t} \Delta_1 \left\{ m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right\} +$$

$$- \frac{\partial u}{\partial r} \Delta_2 m_1^2 + \frac{\partial u}{\partial s} \Delta_2 m_1 = 0.$$

Cette relation devient, à cause de (2):

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Delta_1 m_2 + q \frac{\partial u}{\partial z} \Delta_1 m_2 + (m_1^2 - m_1 m_2 + s \Delta_1 m_2) \frac{\partial u}{\partial p} +$$

$$(m_2 - m_1 + t \Delta_1 m_2) \frac{\partial u}{\partial q} - \left\{ \Delta_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1 \Delta_2 m_1 \right\} \frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$- \left[\Delta_1 \left\{ m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right\} - \frac{1}{m_1} \Delta_2 m_1 \right] \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Pour que le premier membre de cette équation soit nul, il faut que les coefficients des dérivées de u le soient séparément, ce qui exige que

$$\Delta_1 m_2 = 0, \quad m_1 - m_2 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\Delta_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1 \Delta_2 m_1 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\Delta_1 \left\{ m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right\} - \frac{1}{m_1} \Delta_2 m_1 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Il suit de là que, puisqu'il faut que $m_1 = m_2$, l'équation caractéristique doit avoir deux racines égales et qu'on aura par conséquent

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 - 4 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Si nous intégrons cette équation, l'équation aux dérivées partielles donnée sera le résultat de l'élimination de m entre

$$r + m s = 2 F(x, y, z, p, q, m) - m \frac{\partial F}{\partial m} \quad \text{et} \quad s + m t = \frac{\partial F}{\partial m}, \quad (7)$$

équations dans lesquelles F est une fonction arbitraire.

Il est, en même temps, évident que m est la racine de l'équation caractéristique de (7), car si on met (7) sous la forme

$$r + 2 m s + m^2 t = 2 F, \quad s + m t = \frac{\partial F}{\partial m}, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

on aura, en différentiant la première équation de (8), à cause de la seconde :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = 2 m, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = m^2; \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

et l'équation caractéristique de (8) devient

$$\frac{\partial f}{\partial r} \alpha^2 - \frac{\partial f}{\partial s} \alpha + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 - 2 m \alpha + m^2 = 0,$$

de sorte que $\alpha = m$, ainsi que cela doit être.

Si les racines sont égales, la première des équations (4), savoir $\Delta_1 m = 0$, sera satisfaite également.

En effet, il est évident que l'expression

$$\left(m_1{}^2 \frac{\partial m_2}{\partial r} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} + \frac{\partial m_2}{\partial t}\right) + \left(m_2{}^2 \frac{\partial m_1}{\partial r} - m_2 \frac{\partial m_1}{\partial s} + \frac{\partial m_1}{\partial t}\right)$$

est nulle pour $m_1 = m_2$, d'où il résulte que

$$m^2 \frac{\partial m}{\partial r} - m \frac{\partial m}{\partial s} + \frac{\partial m}{\partial t} = 0\,;$$

et on pourra alors, eu égard à (9), écrire les équations de condition (5) et (6) comme suit:

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + m\,\Delta_2\, m = 0, \text{ et } \Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2\, m = 0.$$

On tire facilement de ces deux dernières:

$$\Delta_1 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + m \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

et

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2\, m = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Et comme, d'après (8), on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \text{ et } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -2 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

l'équation (10) devient

$$\Delta_1 \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + m \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right\} = 0,$$

ou

$$\Delta_1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} m + \frac{\partial F}{\partial z} (p + m\,q) + \frac{\partial F}{\partial p} (r + m\,s) + \frac{\partial F}{\partial q} (s + m\,t) \right\} = 0.$$

Mais cette équation est toujours satisfaite; donc, pour que le système (2) ait 5 intégrales, il ne reste plus, pour équation de condition, que la seule relation (11), ou

$$\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right) + m \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\partial m}{\partial r} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial m}{\partial t} - \Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \quad (11).$$

D'autre part, comme en posant $\frac{\partial F}{\partial m} = F'_m$ on a

$$\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right) = \frac{\left(\frac{\partial F'_m}{\partial x}\right)}{t - F''_m} \text{ et } \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial F'_m}{\partial y}\right)}{t - F''_m},$$

l'équation (11) devient

$$\left(\frac{\partial F'_m}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial F'_m}{\partial y}\right) - 2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + 2(t - F''_m)\left(\frac{\partial F}{\partial q} - m\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial F'_m}{\partial x} + m\frac{\partial F'_m}{\partial y} + \frac{\partial F'_m}{\partial z}(p + mq) +$$

$$2\frac{\partial F'_m}{\partial p} F + F'_m \left(\frac{\partial F'_m}{\partial q} - m\frac{\partial F'_m}{\partial p}\right) +$$

$$-2\left\{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} F'_m + F''_m\left(\frac{\partial F}{\partial q} - m\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\} = 0. \quad (12).$$

Intégrons à présent l'équation

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

ou

$$r + 2ms + m^2 t = 2F, \quad s + mt = \frac{\partial F}{\partial m}, \quad . . (13)$$

dans laquelle F satisfait à l'équation (12).

Le système (2) devient ainsi

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} m^2 - \frac{\partial u}{\partial s} m + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.\end{array}\right\} \quad . . (14)$$

Nous allons maintenant ramener l'intégration de cette dernière à celle d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre.

Formons le système de Lagrange en multipliant la seconde équation (14) par le facteur indéterminé λ et l'ajoutant ensuite à la première de (14), puis éliminons λ, nous aurons :

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{r+ms}=\frac{dq}{s+mt}=\frac{dr+mds}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{ds+mdt}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \quad (15).$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur de chacun des membres de (15) respectivement par

$$\frac{\partial m}{\partial x}, \quad \frac{\partial m}{\partial y}, \quad \frac{\partial m}{\partial z}, \quad \frac{\partial m}{\partial p}, \quad \frac{\partial m}{\partial q}, \quad \frac{\partial m}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial t};$$

il vient comme nouveau membre

$$\frac{\frac{\partial m}{\partial x}dx+\frac{\partial m}{\partial y}dy+\frac{\partial m}{\partial z}dz+\frac{\partial m}{\partial p}dp+\frac{\partial m}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial m}{\partial r}m+\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial t}\right)ds+\frac{\partial m}{\partial t}dt}{\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+m\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial m}{\partial r}-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial m}{\partial t}}.$$

Et comme

$$m^2\frac{\partial m}{\partial r}-m\frac{\partial m}{\partial s}+\frac{\partial m}{\partial t}=0,$$

on peut remplacer le numérateur par $d\,m$, tandis que le dénominateur est $\Delta_2\, m$, de sorte que le nouveau membre de (15) devient $\frac{dm}{\Delta_2 m}$; donc puisque, en vertu de (11),

$$\Delta_2\, m = \Delta_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial q}\right),$$

(15) devient

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{r+ms}=\frac{dq}{s+mt}=\frac{dm}{2\left(m\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial q}\right)}.$$

Si l'on substitue à $r+ms$ et $s+mt$ leurs valeurs tirées de (13), on obtient

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{2F-mF'_m}=\frac{dq}{F'_m}=\frac{dm}{2\left(m\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial q}\right)}.$$

Or ceci est le système auxiliaire de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + (p + mq)\frac{\partial u}{\partial z} + (2F - mF'_m)\frac{\partial u}{\partial p} +$$

$$F'_m\frac{\partial u}{\partial q} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

à laquelle on ramène ainsi l'intégration de l'équation (13).

Pour interpréter la signification des intégrales de cette équation en rapport avec l'intégration de (13), considérons le système (2), développé suivant la méthode de Darboux au § 1 de la première partie.

Il est alors évident que ces intégrales sont telles qu'elles aient une solution commune avec l'équation aux dérivées partielles donnée; tandis que si ces intégrales sont

$$\varphi_i(x, y, z, p, q, m, c_i) = 0, \quad i = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \ldots \quad (17)$$

cela sera aussi le cas pour

$$c_2 = \psi_1(c_1), \quad c_3 = \psi_2(c_1), \quad c_4 = \psi_3(c_1), \quad c_5 = \psi_4(c_1). \quad (18).$$

Pour déterminer l'intégrale générale de (13) nous avons encore les équations

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$
$$dy = m\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Comme nous l'avons fait voir précédemment, dans le cas où l'équation caractéristique a deux racines égales, il était impossible de démontrer que les valeurs de p, q, r, s, et t, tirées des intégrales (17), rendent intégrables les équations (19). Déterminons à cet effet les fonctions arbitraires de (18) de manière que tel soit bien le cas, et nous aurons l'intégrale générale de (13), qui devra avoir deux fonctions arbitraires. Dans ce but, nous remplacerons x et y par les nouvelles variables indépendantes x et $c_1 = c$, et les relations (19) deviendront:

$$\frac{\partial z}{\partial c} = q \frac{\partial y}{\partial c}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20),$$

$$\frac{\partial p}{\partial c} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Tirons des équations (18) les valeurs de y, z, p, q et m, il viendra:

$$\left.\begin{array}{l} m = \chi_0 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ q = \chi_1 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ p = \chi_2 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ z = \chi_3 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ y = \chi_4 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}. \end{array}\right\} \ldots \quad (23).$$

Si nous pouvons déterminer les fonctions arbitraires de (23) de telle manière que les équations (20), (21) et (22) soient satisfaits et qu'il n'en reste plus que deux arbitraires, on aura trouvé l'intégrale générale de (13), car elle résultera de l'élimination de c entre

$$z = \chi_3 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}$$

et

$$y = \chi_4 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}.$$

En premier lieu, l'équation (22) est toujours satisfaite par les équations (23) si (20) et (21) le sont également. Car l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$ est une des équations du système auxiliaire que nous avons intégré, et si nous y substituons les valeurs de y, z, p et q de (23), exprimées dans x et les cinq constantes d'intégration, cette équation deviendra une identité, dans la supposition que les cinq constantes soient réellement constantes. Dans ce cas l'équation (22) est satisfaite.

Mais si nous considérons quatre des constantes comme fonctions de la cinquième, les relations (23) existent et l'équation (22) devient:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial c} + q\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \left(p + q\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right)\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad . \; . \; . \; (24).$$

Et comme nous avons supposé l'équation (20) satisfaite, il en sera de même, dans ce cas, pour (24).

Il reste encore (20) et (21). Or (21) est la dérivée de (20) par rapport à x (x et c étant considérés comme variables indépendantes).

Déterminons donc les fonctions arbitraires de manière à satisfaire aux équations

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c} = 0 \quad \text{ou} \quad L = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

et à leurs dérivées par rapport à x.

Substituons dans (20) les valeurs z, q et y, des équations (23). Nous pouvous trouver alors deux relations entre les quatre fonctions arbitraires et pas davantage, d'où il suit que l'intégrale trouvée renferme encore deux fonctions arbitraires et forme par conséquent l'intégrale générale.

Démontrons à cet effet que l'équation (20) est de la forme $A\,\lambda(x) + B\,\mu(x) = 0$, où $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont fonction de x et A et B des fonctions de c seulement.

Puisque les dérivées par rapport à x devront être nulles aussi, on aura à la fois $A = 0$ et $B = 0$, et l'on aura trouvé ainsi les relations cherchées.

En différentiant $\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}$ ou L par rapport à x il vient:

$$\frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - (s + mt)\frac{\partial y}{\partial c} =$$

$$\frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - F^1(m)\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{dL}{dx}.$$

Différentions de nouveau cette forme par rapport à x (x et c étant pris pour variables indépendantes), nous aurons:

$$\frac{d^2 L}{d x^2} = \frac{\partial (r + ms)}{\partial c} + m \frac{\partial (s + mt)}{\partial c} + \frac{d m}{d x}\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{dF'(m)}{d x}\frac{\partial y}{\partial c} - F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} =$$

$$\frac{\partial (2 F - m F')}{\partial c} + m \frac{\partial F'}{\partial c} - F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} + \frac{d m}{d x}\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{d F'(m)}{d x}\frac{\partial y}{\partial c} =$$

$$2\frac{\partial F}{\partial c} - 2 F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} + \frac{d m}{d x} t \frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial q}{\partial c} - t\frac{\partial y}{\partial c}\right)\frac{d m}{d x} - \frac{d F'(m)}{d x}\frac{d y}{d c} =$$

$$2\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial z} q \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial p} s \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial q} t \frac{\partial y}{\partial c}\right\} + 2\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right) +$$

$$+ 2\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial c} - s\frac{\partial y}{\partial c}\right) + 2\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial c} - t\frac{\partial y}{\partial c}\right) - 2F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right) t \frac{\partial y}{\partial c} +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial F}{\partial p} m - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial c} - t\frac{\partial y}{\partial c}\right) - \left\{\left(\frac{\partial F' m}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial F' m}{\partial y}\right)\right\}\frac{\partial y}{\partial c} - F''(m)\frac{dm}{dx}\frac{\partial y}{\partial c} =$$

$$\left[\left(2\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \left\{\left(\frac{\partial F'(m)}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial F'(m)}{\partial y}\right)\right\} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\left\{t - F''(m)\right\}\right]\frac{\partial y}{\partial c} +$$

$$2\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right) + 2\left\{\frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - (s + mt)\frac{\partial y}{\partial c}\right\}\frac{\partial F}{\partial p}.$$

Or, le coefficient de $\frac{\partial y}{\partial c}$ est nul, car c'est là précisément l'équation de condition (12), tandis que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial z}$ est exactement L, et $\frac{d L}{d x}$ celui de $\frac{\partial F}{\partial p}$. On a donc:

$$2\frac{\partial F}{\partial z} L + 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{d L}{d x} = \frac{d^2 L}{d x^2},$$

ou bien

$$\frac{d^2 L}{d x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{d L}{d x} - 2\frac{\partial F}{\partial z} L = 0 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \; (25).$$

Ceci est une équation différentielle linéaire en L, dont l'intégrale est $L = A\,\lambda(x) + B\,\mu(x)$, A et B étant des constantes d'intégration, $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ des solutions particulières. L'équation (20) est donc de la forme

$$A\,\lambda(x) + B\,\mu(x) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles du 2e ordre, dont l'équation caractéristique a deux racines égales, et qui est par conséquent de la forme

$$\left.\begin{aligned} r + m s &= 2 F(x, y, z, p, q, m) - m \frac{\partial F}{\partial m}, \\ s + m t &= \frac{\partial F}{\partial m}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (A).$$

nous déterminerons les cinq intégrales de l'équation

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + (p + m q) \frac{\partial u}{\partial z} + 2(F - m F'_m) \frac{\partial u}{\partial p} + \\ F'_m \frac{\partial u}{\partial q} + 2 \left(m \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right) \frac{\partial u}{\partial m} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \ (B).$$

Si maintenant F satisfait à l'équation de condition

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F'_m}{\partial x} + m \frac{\partial F'_m}{\partial y} + \frac{\partial F'_m}{\partial z} (p + m q) + 2 \frac{\partial F'_m}{\partial p} F + \\ F'_m \left(\frac{\partial F'_m}{\partial q}\right) - m \frac{\partial F'_m}{\partial p}\Big) + \\ - 2 \left\{\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} + F'_m \frac{\partial F}{\partial p} + F''_m \left(\frac{\partial F}{\partial q} - m \frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \ (C).$$

on obtiendra l'intégrale générale en considérant, dans les cinq intégrales, quatre des constantes comme fonctions arbitraires de la cinquième et en éliminant p, q et m.

Par l'élimination de la constante des deux dernières intégrales on a l'intégrale finale, dans laquelle deux des fonctions arbitraires pourront encore être déterminées par l'équation $\frac{\partial z}{\partial c} - q \frac{\partial y}{\partial c} = 0$, qui est de la forme $A \lambda(x) + B \mu(x) = 0$, et d'où l'on déduit les relations $A = 0$ et $B = 0$; z q et y étant exprimés au moyen de x, c et des fonctions arbitraires de c.

§ 2.

Appliquons la théorie développée ci-dessus à quelques exemples.

Soit à intégrer l'équation

$$f(r, s, t) = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles devient d'après (A):

$$\left.\begin{aligned} r + m s &= 2 F(m) - m \frac{d F}{d m}, \\ s + m t &= \frac{d F}{d m}. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Le système auxiliaire est d'après (B):

$$\frac{d x}{1} = \frac{d y}{m} = \frac{d z}{p + m q} = \frac{d p}{2 F(m) - m F'(m)} = \frac{d q}{F'(m)} = \frac{d m}{0}.$$

On a les intégrales:

$$m = c,\ q = x F'(c) + c_2,\ p = - c x F'(c) + 2 x F(c) + c_3,$$
$$z = x^2 F(c) + (c_3 + c c_2) x + c_4,\ y = c x + c_1.$$

Posons c_1, c_2, c_3 et c_4 égaux à des fonctions arbitraires de c, nous aurons pour les déterminer l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q \frac{\partial y}{\partial c} = L = 0.$$

L'équation (25) est $\frac{d^2 L}{d x^2} = 0$, donc $L = A x + B = 0$.

Substituant les valeurs de z, q et y dans $L = 0$, il vient

$$\left(\frac{\partial c_3}{\partial c}\right) + c \frac{\partial c_2}{\partial c} - \frac{\partial c_1}{\partial c} \frac{\partial F}{\partial c}\Big) x + \left(\frac{\partial c_4}{\partial c} - c_2 \frac{\partial c_1}{\partial c}\right) = 0,$$

de sorte que les relations entre les fonctions arbitraires sont:

$$\frac{\partial c_3}{\partial c} + c \frac{\partial c_2}{\partial c} - \frac{\partial c_1}{\partial c} \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \text{ et } \frac{\partial c_4}{\partial c} - c_2 \frac{\partial c_1}{\partial c} = 0.$$

L'intégrale générale (1) est donc le résultat de l'élimination de c des deux équations

$$\left.\begin{aligned} &z = x_2 F(c) + \{\psi_3(c) + c \psi_2(c)\} x + \psi_4(c), y = cx + \psi_1(c), \\ &\psi_3'(c) + c \psi_2'(c) - \psi_1'(c) F'(c) = 0,\ \psi_4(c) - \psi_2(c) \psi_1'(c) = 0. \end{aligned}\right\} (2).$$

L'intégrale de (1) a aussi été trouvée par M. De Boer, à la page 231 de son travail cité plus haut.

En posant

$$\psi_3 + c\,\psi_2 = 2\,\psi_1{}'\,F + \frac{\chi'}{\psi_1{}''},$$

où χ est une nouvelle fonction arbitraire, l'équation (2) se change en celle trouvée à la page 233 de ce mémoire:

$$z = F(c)\{x + \psi_1{}'(c)\}^2 + \frac{\chi'(c)}{\psi''(c)}\{x + \psi_1{}'(c)\} - \chi(c), y = cx + \psi_1(c).$$

Soit à intégrer l'équation

$$f(x, r, s, t) = 0 \qquad (3).$$

Il résulte de (C) qu'on a pour déterminer F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m\, \partial x} = 0, \text{ ou } F(x, m) = \Omega(m) + \chi(x).$$

L'équation aux dérivées partielles est donc, d'après (A):

$$r + m\,s = 2\,\Omega(m) - m\,\Omega'(m) + 2\,\chi(x),$$
$$s + mt = \Omega'(m);$$

et son intégrale est:

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 F(c) + \{\psi_3(c) + c\,\psi_2(c)\}x + \psi_4(c) + 2\int^2 \chi(x)\,dx, \\ y = c\,x + \psi_1(c),\ \psi_4{}'(c) = \psi_2(c)\,\psi_1{}'(c), \\ \psi_3{}'(c) + c\,\psi_2{}'(c) = \psi_1{}'(c)\,F(c). \end{array}\right\} (4).$$

Soit encore à intégrer l'équation

$$f(z, r, s, t) = 0 \qquad (5).$$

Pour déterminer F on aura, d'après (C):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m\, \partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Des équations de la forme (5) ne satisfont donc pas à (C).

Pour intégrer l'équation

$$f(y, r, s, t) = 0 \qquad (6).$$

il suffit de la ramener à (3) en permutant x et y et réciproquement.

Soit à intégrer

$$f(q, r, s, t) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

En vertu de (C) nous déterminons F par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial m} \frac{\partial^2 F}{\partial m \, \partial q} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

dont voici une première intégrale:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \varphi''(q) \left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)^2.$$

L'intégrale de cette dernière est à son tour

$$F = a\, m + a^2\, \varphi'(q) + \chi(a), \qquad m + 2\, a\, \varphi'(q) + \chi'(a) = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles (A) devient ainsi:

$$r + m\, s = a\, m + 2\, a^2\, \varphi'(q) + 2\, \chi(a),$$
$$s + m\, t = a, \quad m + 2\, a\, \varphi'(q) + \chi'(a) = 0,$$

ou

$$\left. \begin{array}{l} r - m^2\, t = 2\,(s + m\, t)^2\, \varphi'(q) + 2\, \chi(s + m\, t), \\ m + 2\,(s + m\, t)\, \varphi'(q) + \chi'(s + m\, t) = 0, \end{array} \right\} \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

pour laquelle le système auxiliaire de (B) est

$$\frac{d\,x}{1} = \frac{d\,y}{m} = \frac{d\,z}{p + m\, q} = \frac{d\,p}{a\, m + 2\, a^2\, \varphi'(q) + 2\, \chi(a)} =$$
$$\frac{d\,q}{a} = \frac{d\,m}{-2\, a^2\, \varphi''(q)},$$

équation dans laquelle a a une valeur déterminée par la relation

$$m + 2\, a\, \varphi'(q) + \chi'(a) = 0.$$

Au lieu de m, prenons a comme nouvelle variable indépendante, le système auxiliaire devient alors:

$$\frac{d\,x}{1} = \frac{d\,y}{-2\, a\, \varphi'(q) - \chi'(a)} = \frac{d\,z}{p - a\, q\, \varphi'(q) - q\, \chi'(a)} =$$
$$\frac{d\,p}{-a\, \chi'(a) + 2\, \chi(a)} = \frac{d\,q}{a} = \frac{d\,a}{0},$$

et donne pour intégrales:

$$a = c, \quad q = a x + c_1, \quad p = - a x \chi'(a) + 2 x \chi(a) + c_2,$$
$$y = - 2 \varphi(a x + c_1) - x \chi'(a) + c_3,$$
$$z = x^2 \{ \chi(a) - a \chi'(a) \} + \{ c_2 - c_1 \chi'(a) - 2 a \varphi(a x + c_1) \} x +$$
$$- 2 c_1 \varphi(a x + c_1) + 2 a \int \varphi(a x + c_1) \, d x + c_4.$$

Posant c_1, c_2, c_3 et c_4 égaux à des fonctions arbitraires de a, nous aurons pour déterminer ces quantités $\frac{\partial z}{\partial c} - q \frac{\partial y}{\partial c} = L = 0$.

L'équation (25) est $\frac{d^2 L}{d x^2} = 0$ ou $A + B x = 0$.

Remplaçant dans $L = 0$, z, q et y par leurs valeurs, il vient :

$$(\psi_2' - a \psi_3' - \psi_1' \chi') x + (\psi_4' - \psi_1 \psi_3) = 0,$$

et pour déterminer les deux fonctions arbitraires nous aurons donc les relations

$$\psi_2' - a \psi_3' - \psi_1' \chi' = 0 \text{ et } \psi_4' - \psi_1 \psi_3' = 0.$$

L'intégrale de (8) est donc

$$z = x^2 \{ \chi(a) - a \chi'(a) \} + \{ \psi_2(a) - \psi_1(a) \chi'(a) -$$
$$2 a \varphi(a x + \psi_1(a)) \} x - 2 \psi_1(a) \varphi \{ a x + \psi_1(a) \} +$$
$$+ 2 a \int \varphi \{ a x + \psi_1(a) \} d x + \psi_4(a),$$
$$y = - 2 \varphi \{ a x + \psi_1(a) \} - x \chi'(a) + \psi_3(a),$$
$$\psi_2'(a) - a \psi_3'(a) - \psi_1'(a) \chi'(a) = 0,$$

et

$$\psi_4'(a) - \psi_1(a) \psi_3'(a) = 0.$$

§ 3.

Si nous posons

$$F = - \tfrac{1}{2} R m^2 + m S - \tfrac{1}{2} T,$$

où R, S et T sont des fonctions de x, y, z, p et q, l'équation (A) devient :

$$r + m s = m S - T, \quad s + m t = - m R + S; \quad . \; . \; . \; (1)$$

d'où, en éliminant m, on obtient :

$$r t - s^2 + R r + 2 S s + T t + R T - S^2 = 0 \quad . \; . \; (2).$$

L'intégration de cette équation connue est ramenée par la méthode de Monge au système

$$dz = pdx + qdy,\ dp = -Tdx + Sdy,\ dq = Sdx - Rdy, \quad (3)$$

d'où, l'on peut déduire par transformation les équations de Boole:

$$\left.\begin{aligned} S\frac{\partial u}{\partial p} - R\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ T\frac{\partial u}{\partial p} - S\frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial z} p - \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Si ce système a 3 intégrales, savoir

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad u_3 = c,$$

et si on résout par rapport à z, il vient

$$z = \varphi(x, y, a, b, c).$$

On obtiendra alors l'intégrale générale en éliminant c des deux équations

$$z = \varphi \{ x, y, c, \psi_1(c), \psi_2(c) \}, \quad \frac{d\varphi}{dc} = 0.$$

En appliquant la méthode de Jacobi aux équations (4), on trouve comme équations de condition pour l'existence des 3 intégrales $u = c$ les deux relations

$$\Delta_3 S + \Delta_4 T = 0, \quad \Delta_3 R + \Delta_4 S = 0, \quad \ldots\ldots (5)$$

où l'on a

$$\Delta_3 = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} - T\frac{\partial}{\partial p} + S\frac{\partial}{\partial q},$$

et

$$\Delta_4 = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + S\frac{\partial}{\partial p} - R\frac{\partial}{\partial q}. \quad \ldots\ldots (6)$$

Intégrons maintenant (1) d'après la méthode développée aux paragraphes précédents.

L'équation (B) § 1 devient:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + (p + mq)\frac{\partial u}{\partial z} + (mS - T)\frac{\partial u}{\partial p} +$$

$$(-mR + S)\frac{\partial u}{\partial q} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial m} = 0. \; . \; . \; . \quad (7)$$

L'équation (C), à laquelle doit satisfaire F, devient après quelques transformations

$$(\Delta_3 S + \Delta_4 T) - m(\Delta_3 R + \Delta_4 S) = 0,$$

où Δ_3 et Δ_4 ont la même signification que dans (6).

Toutefois, on ne peut satisfaire à celle-ci que si l'on a séparément

$$\Delta_3 S + \Delta_4 T = 0 \text{ et } \Delta_3 R + \Delta_4 S = 0,$$

puisqu'aucune de ces deux formes ne contient m, mais seulement x, y, z, p et q. Ce sont d'ailleurs les mêmes équations de condition que (5).

L'intégration suivant la méthode de Boole peut donc être effectuée sous les mèmes conditions que suivant la méthode donnée ici.

Formons le système auxiliaire de (7):

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{p + mq} = \frac{dp}{mS - T} = \frac{dq}{--mR + S} = \frac{dm}{2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{dq}\right)} \; . \; . \quad (8)$$

Les équations (3) de Monge y sont comprises, car en combinant les cinq premiers membres, on obtient la relation suivante indépendante de m:

$$\frac{dx}{1} = \frac{R\,dy + dq}{S} = \frac{S\,dy - dp}{T} = \frac{dz - (p\,dx + q\,dy)}{0},$$

ou

$$dz = pdx + qdy,\; dp = -Tdx + Sdy,\; d = Sdx - Rdy.$$

Comme application, nous allons intégrer

$$r + ms = m - (p + q),\; s + mt = 1 - m, \text{ [1]}$$

$$\text{ou} \quad (r + p + q)(t + 1) = (1 - s)^2.$$

Il est satisfait à (C).

---

[1] Voir pour l'intégration de cette équation au moyen de (4), Imschenetsky, *Grünerts Arch.* 54, Chap. III § 13.

Le système (8) devient

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{m-(p+q)}=\frac{dq}{1-m}=\frac{dm}{1-m},$$

et il a pour intégrales:

$$m=1+c_2\,e^{-x},\ q=c_2\,e^{-x}-c_3+a,$$
$$p=-be^{-x}-c_2\,e^{-x}+c_3-a+1,\ y=x-c_2\,e^{-x}+c_3,$$
$$z=b\,e^{-x}+x+c-\tfrac{1}{2}(c_2\,e^{-x}-c_3+a)^2.$$

Si l'on pose b, c, c_2 et c_3 égaux à des fonctions arbitraires de a, on aura, pour déterminer ces grandeurs:

$$\frac{\partial z}{\partial c}-q\frac{\partial y}{\partial c}=L=0.$$

L'équation (25) § 1 est ici

$$\frac{d^2L}{dx^2}+\frac{dL}{dx}=0 \text{ ou } L=Ae^{-x}+B=0.$$

L'introduction dans $L=0$, des valeurs de z, q et y donne:

$$\left(\frac{db}{da}-c_2\right)e^{-x}+\left(\frac{dc}{da}+c_3-a\right)=0,$$

de sorte que les relations entre les fonctions arbitraires sont:

$$\frac{db}{da}-c_2=0 \text{ et } \frac{dc}{da}+c_3-a=0.$$

Si nous posons $b=\varphi(a)$ et $c=f(a)$, l'intégrale devient:

$$z=\varphi(a)+x+f(a)-\tfrac{1}{2}(x-y+a)^2,$$
$$y=x-\varphi'(a)\,e^{-x}+a-f'(a).$$

La seconde de ces équations est évidemment la dérivée de z par rapport à a de la première, ce qui doit être suivant la méthode de Boole, car

$$z=b\,e^{-x}+x+c-\tfrac{1}{2}(x-y+a)^2$$

est une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles donnée.

Soit à intégrer l'équation

$$r+ms=z-qy,\ s+mt=0 \text{ ou } (rt-s^2)=(z-qy)\,t.$$

Il est satisfait à l'équation de condition (C).

Le système auxiliaire de (B) devient:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{p + mq} = \frac{dp}{z - qy} = \frac{dq}{0} = \frac{dm}{y}.$$

On obtient des intégrales par l'intégration de

$$\frac{dm + dy}{m + y} = \frac{dx}{1}, \quad \frac{dy - dm}{m - y} = \frac{dx}{1}, \quad dq = 0;$$

celles-ci sont donc

$$y + m = 2c_1 e^x, \quad y - m = 2c_2 e^{-x}, \quad q = c.$$

D'autre part on a

$$\frac{dp + q\,dm + dz}{p + qm + z} = \frac{dp + q\,dm - dz}{-(p + qm) + z} = \frac{dx}{1},$$

ou

$$p + mc + z = 2c_3 e^x,$$

$$z - (p + mc) = 2c_4 e^{-x}.$$

On a donc les intégrales

$$z = c_3 e^x + c_4 e^{-x}, \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad q = c.$$

Si l'on égale c_1, c_2, c_3 et c_4 à des fonctions arbitraires de c, on les déterminera par la relation

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c} = L = 0.$$

L'équation (25) § 1 est, dans le cas actuel,

$$\frac{d^2 L}{dx^2} - L = 0 \text{ ou } L = A e^x + B e^{-x} = 0.$$

L'introduction des valeurs de q, z et y dans $L = 0$ donne

$$(c_3' - c c_1') e^x + (c_4' - c c_2') e^{-x} = 0;$$

et ainsi les relations entre les fonctions arbitraires sont:

$$c_3' - c c_1' = 0, \quad c_4' - c c_2' = 0$$

ou

$$c_3 = c c_1 - \int c_1 \, dc, \quad c_4 = c c_2 - \int c_2 \, dc.$$

Si nous posons $c_1 = f'(c)$ et $c_2 = \varphi'(c)$, l'intégrale devient

$$z = \{ c f'(c) - f(c) \} e^x + \{ c \varphi'(c) - \varphi(c) \} e^{-x},$$
$$y = f'(c) e^x + \varphi'(c) e^{-x}.$$

ou

$$z = c y - \{ f(c) e^x + \varphi(c) e^{-x} \},$$
$$y = f'(c) e^x + \varphi'(c) e^{-x}.$$

Cette dernière équation est de nouveau la dérivée de la précédente par rapport à c, ce qui doit être, puisque

$$z = c y + a e^x + b e^{-x}.$$

est une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles donnée.

§ 4.

Intégrons l'équation

$$r + 2 N s + N^2 t + v = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dans laquelle N et v sont des fonctions de x, y, z, p et q.

Cette équation est un cas particulier de l'équation (2) § 3. Selon la méthode de Boole, on a ici pour système auxiliaire:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y} + (p + N q) \frac{\partial u}{\partial z} = v \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} - N \frac{\partial u}{\partial p} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Si

$$f_1(x, y, z, p, q, a) = 0, \; f_2(x, y, z, p, q, b) = 0$$

et

$$f_3(x, y, z, p, q, c) = 0$$

sont les trois intégrales de ce système, on ne peut dans ce cas, ainsi que nous l'avons fait voir [1]), obtenir l'intégrale générale de (1) par élimination de p et de q entre les trois

[1]) Voir Speckman, *loc. cit.* pages 35—55.

intégrales, et élimination consécutive de c entre les équations

$$z = \varphi \{ x, y, c, \chi(c), \varphi(c) \} \text{ et } \frac{d\varphi}{dc} = 0.$$

Nous sommes arrivés, dans la méthode d'intégration exposée plus haut, à la proposition suivante:

Si dans l'équation

$$r + 2Ns + N^2 t + v = 0$$

N est une racine de

$$\varphi(x, y, z, N, p + Nq) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

et que v soit déterminée par la relation

$$v\frac{\partial N}{\partial p} = \frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z} - F(x, y, z, N), \ldots (5)$$

où φ et F sont des fonctions arbitraires, on pourra ramener l'intégration de (2) et (3) à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + N\frac{\partial u}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial u}{\partial z} + F(x, y, z, N)\frac{\partial u}{\partial N} = 0, \quad \ldots (6)$$

dans laquelle il faut remplacer $p + Nq$ par la valeur tirée de (4).

Si les intégrales de cette dernière équation sont

$$f_1(x, y, z, N, c_1) = 0, f_2(x, y, z, N, c_2) = 0, f_3(x, y, z, N, c_3) = 0,$$

alors, en éliminant N et c des équations

$$\begin{aligned} &f_1(x, y, z, N, c) = 0, \\ &f_2\{ x, y, z, N, \psi_1(c) \} = 0, \\ &f_3\{ x, y, z, N, \psi_2(c) \} = 0, \end{aligned}$$

on obtiendra l'intégrale générale de (1).

Si l'équation (4), qui sert à déterminer N, ne renferme pas p et q, les relations (4) et (5) se changent en

$$N = \varphi_1(x, y, z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$q\left\{\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} - (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z}\right\} =$$

$$v + F(x, y, z, p + Nq); \ldots\ldots\ldots (8)$$

tandis que (6) devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} + F(x, y, z, \mu) \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0, \quad . \; . \quad (9)$$

où l'on a supposé $p + Nq = \mu$.

On déduit de la même manière l'intégrale générale des trois intégrales de (9).

Appliquons maintenant à (8) la méthode d'intégration exposée au § 1.

Les équations d'où nous partons sont de nouveau celles du système (2) § 1.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ ou } \Delta_2 u = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} N_2 - \frac{\partial u}{\partial s} N + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ ou } \Delta_1 u = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Les équations de condition nécessaires pour que le plus grand nombre d'intégrales communes (5) et (6) du § 1 existent, deviennent :

$$\Delta_1 N = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

$$\Delta_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + N\Delta_2 N = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

$$\Delta_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2 N = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

et comme N ne contient ni r, ni s ou t, l'équation (12) est satisfaite.

Les équations (13) et (14) peuvent se remplacer par

$$\Delta_1 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + N \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\} = 0 \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

$$\Delta_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2 N = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Effectuant les opérations dans (15), nous obtenons:

$$\Delta_1 \Big[2(s+Nt)\Big\{ \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} N + \frac{\partial N}{\partial z}(p+Nq) + \frac{\partial N}{\partial p}(r+Ns) + \frac{\partial N}{\partial q}(s+Nt) \Big\} + \Big\{ \frac{\partial v}{\partial x} + N\frac{\partial v}{\partial y} + (p+Nq)\frac{\partial v}{\partial z} + (r+Ns)\frac{\partial v}{\partial p} + (s+Nt)\frac{\partial v}{\partial q} \Big\} \Big] = 0.$$

Cette condition est toujours satisfaite, puisque nous avons affaire à une équation identique indépendante des valeurs de v et N.

Il reste donc encore l'équation (16) ou

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p+Nq)\frac{\partial N}{\partial z} + N\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} - v\frac{\partial N}{\partial p} + - (s+Nt)\left(\frac{\partial N}{\partial q} - N\frac{\partial N}{\partial p}\right) = 0,$$

qui ne peut être satisfaite que lorsque le coefficient de $(s+Nt)$ et le reste du premier membre sont nuls séparément, c.à.d. si

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p+Nq)\frac{\partial N}{\partial z} + N\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} - v\frac{\partial N}{\partial p} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial q} - N\frac{\partial N}{\partial p} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Intégrant (18), on a

$$\varphi(x, y, z, N, p, + Nq) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

L'intégration de (17) donne, à cause de (18):

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p+Nq)\frac{\partial N}{\partial z} - v\frac{\partial N}{\partial p} = F(x, y, z, N). \quad (20)$$

Et comme les équations (19) et (20) sont les mêmes que (4) et (5), nous avons le théorème suivant:

L'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire pour les plus hautes dérivées, dépend, ainsi que celle d'Ampère, que l'on parte du système de Monge ou du système de Darboux, des mêmes équations de condition, pourvu que l'équation caractéristique ait deux racines égales et

que les systèmes auxiliaires renferment le plus grand nombre d'intégrales communes. Nous allons faire voir à présent que dans les deux cas nous obtenons aussi le même système auxiliaire.

Multiplions (11) par un facteur indéterminé λ et ajoutons-la à (10); puis formons le système de Lagrange et éliminons λ, nous aurons

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{N}=\frac{dz}{p+Nq}=\frac{dp}{r+Ns}=\frac{dq}{s+Nt}=\frac{dr+ds}{-2(s+Nt)\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}=$$

$$\frac{ds+N\,dt}{-2(s+Nt)\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}=$$

$$\frac{dr+2N\,ds+N^2\,dt}{-2(s+Nt)\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right\}-\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}} \quad . \; . \; (21)$$

Mais il résulte de $r+2Ns+N^2t+v=0$ que

$$dr+2N\,ds+N^2\,dt=-2(s+Nt)\,dN-dv,$$

et que par là (21) se change en

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{N}=\frac{dz}{p+Nq}=\frac{dp}{r+Ns}=\frac{dq}{s+Nt}=$$

$$=\frac{2(s+Nt)\,dN+dv}{2(s+Nt)\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right\}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\}} \; . \; (22)$$

En combinant, nous pourrons ajouter à cette équation comme nouveau membre:

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\frac{\partial v}{\partial p}dp+\frac{\partial v}{\partial q}dq}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}=$$

$$=\frac{dv}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)},$$

de sorte que (22), à cause de (17) et (18), se change en

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{N} = \frac{dz}{p + Nq} = \frac{dN}{F(x, y, z, N)}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y} + (p + Nq) \frac{\partial u}{\partial z} + F(x, y, z, N) \frac{\partial u}{\partial N} = 0, \quad (23)$$

ce qui est de nouveau l'équation (6).

Si les intégrales de (23) sont

$$f_1(x, y, z, N, c_1) = 0, \qquad f_2(x, y, z, N, c_2) = 0,$$
$$f_3(x, y, z, N, c_3) = 0,$$

alors

$$c_2 = \psi_1(c_1) \text{ et } c_3 = \psi_2(c_1), \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

dans lesquelles les fonctions ψ sont arbitraires, seront elles-mêmes des intégrales, et comme l'intégrale générale de (1) renferme deux de ces fonctions, celles-ci seront indépendantes l'une de l'autre. Mais alors chaque combinaison de (24) est une intégrale de (1), de sorte qu'on obtient l'intégrale générale de (1) par l'élimination de N entre les deux équations (24).

---

§ 5.

Démontrons maintenant la réciproque de ce qui a été démontré plus haut.

En éliminant c des équations

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \{ x, y, z, c, \psi(c), \chi(c) \} = 0, \\ f_2 \{ x, y, z, c, \chi(c), \psi(c) \} = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

on a une équation aux dérivées partielles de la forme

$$r + 2Ns + N^2 t + v = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dans laquelle N et v satisfont aux relations

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z} + N\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} - v\frac{\partial N}{\partial p} = 0, \quad . \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial q} - N\frac{\partial N}{\partial p} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette équation peut de nouveau être intégrée selon la méthode exposée ci-dessus.

Différentions totalement les équations (1) par rapport à x et à y, il vient

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dc}\frac{dc}{dx} = 0, \quad \frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dc}\frac{dc}{dx} = 0,$$

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dc}\frac{dc}{dy} = 0, \quad \frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dc}\frac{dc}{dy} = 0,$$

où l'on a supposé

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p \text{ et } \frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q.$$

En éliminant $\frac{df_1}{dc}$, $\frac{df_2}{dc}$, $\frac{dc}{dx}$ et $\frac{dc}{dy}$ entre les quatre équations, lesquelles sont homogènes pour les grandeurs à éliminer, nous aurons

$$\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{df_2}{dx}\frac{df_1}{dy} = 0 \text{ ou } F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Cette équation est de la forme

$$F\{x, y, z, p, q, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0.$$

De même que l'équation (5) a été formée à l'aide des équations (1), on pourra tirer de (5) et de l'une des équations (1) les nouvelles équations

$$\frac{dF}{dx}\frac{df_1}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{df_1}{dx} = 0 \ (6a), \quad \frac{dF}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{df_2}{dx} = (6b).$$

Ces dernières sont de la forme

$$\varphi\{x, y, z, p, q, r, s, t, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Eliminons maintenant entre les équations (1), (5) ou (6), ou les suivantes

$$f_1 \{ x, y, z, c, \psi(c), \chi(c) \} = 0,$$
$$f_2 \{ y, x, z, c, \psi(c), \chi(c) \} = 0,$$
$$F \{ x, y, z, p, q, c, \psi(c), \chi(c) \} = 0,$$
$$\varphi \{ x, y, z, p, q, r, s, t, c, \psi(c), \chi(c) \} = 0,$$

les grandeurs c, $\chi(c)$ et $\psi(c)$;

il viendra une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Si nous écrivons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p^2 + \frac{d^2 f}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p q = \frac{d^2 f}{dx \, dy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} q^2 = \frac{d^2 f}{d y^2},$$

nous aurons en développant ($6a$):

$$\left\{ \frac{d f_1}{d y} \frac{d f_2}{d y} r - 2 \frac{d f_1}{d x} \frac{d f_2}{d y} s + \frac{d f_1}{d x} \frac{d f_2}{d x} t \right\} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{d f_2}{d y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{d f_1}{d y} \right) +$$

$$+ \frac{d f_2}{d y} \left\{ \frac{d f_1}{d y} \frac{d f_2}{d y} \frac{d^2 f_1}{d x^2} - 2 \frac{d f_1}{d x} \frac{d f_2}{d y} \frac{d^2 f_1}{dx \, dy} + \frac{d f_1}{d x} \frac{d f_2}{d x} \frac{d^2 f_1}{d y^2} \right\} +$$

$$- \frac{d f_2}{d y} \left\{ \left(\frac{d f_1}{d y} \right)^2 \frac{d^2 f_2}{d x^2} - 2 \frac{d f_1}{d y} \frac{d f_1}{d x} \frac{d^2 f_2}{dx \, dy} + \left(\frac{d f_1}{d x} \right)^2 \frac{d^2 f_2}{d y^2} \right\} = 0. \quad (7)$$

Si, pour abréger, on pose $-\dfrac{\frac{d f}{d x}}{\frac{d f}{d y}} = N$, où, à cause de (5), f peut représenter aussi bien f_1 que f_2, l'équation (7) devient:

$$\frac{d f_1}{d y} \frac{d f_2}{d y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{d f_2}{d y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{d f_1}{d y} \right) (r + 2 N s + N^2 t) +$$

$$+ \frac{d f_1}{d y} \frac{d f_2}{d y} \left\{ \frac{d f_2}{d y} \left(\frac{d^2 f_1}{d x^2} + 2 N \frac{d^2 f_1}{dx \, dy} + N^2 \frac{d^2 f_1}{d y^2} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{d f_1}{d y} \left(\frac{d^2 f_2}{d x^2} + 2 N \frac{d^2 f_2}{dx \, dy} + N^2 \frac{d^2 f_2}{d y^2} \right) \right\} = 0.$$

Et si l'on pose

$$\frac{d^2}{dx^2} + 2N\frac{d^2}{dx\,dy} + N^2\frac{d^2}{dy^2} = \Delta,$$

l'équation précédente se change en

$$r + 2Ns + N^2 t + \frac{\frac{d f_2}{d y}\Delta f_1 - \frac{d f_1}{d y}\Delta f_2}{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{d f_2}{d y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{d f_1}{d y}} = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

Eliminons donc c, $\psi(c)$ et $\chi(c)$ entre cette équation et les suivantes :

$$f_1 \left\{ x, y, z, c, \psi(c), \chi(c) \right\} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$f_2 \left\{ x, y, z, c, \psi(c), \chi(c) \right\} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

et

$$\frac{d f_1}{d x}\frac{d f_2}{d y} - \frac{d f_2}{d x}\frac{d f_1}{d y} = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

nous obtiendrons l'équation aux dérivées partielles cherchée.

Démontrons maintenant que celle-ci satisfait a (3) et (4).

Imaginons les valeurs de $\psi(c)$ et $\chi(c)$, tirées de (9) et (10), substituées dans (8) et (11), il nous suffira d'éliminer encore c entre ces deux dernières, que nous appellerons alors (8a) et (11a).

De (11a) on tire :

$$N\frac{\partial c}{\partial p} - \frac{\partial c}{\partial q} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\frac{d f_2}{d y}\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{d f_1}{d y}}{\frac{d f_1}{d y}\left(\frac{d^2 f_2}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_2}{dc\,dy}\right) - \frac{d f_2}{d y}\left(\frac{d^2 f_1}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_1}{dc\,dy}\right)}, \quad \ldots (13)$$

$$\frac{dc}{dx} + N\frac{dc}{dy} = -\frac{\frac{d f_2}{d y}\Delta f_1 - \frac{d f_1}{d y}\Delta f_2}{\frac{d f_2}{d y}\left(\frac{d^2 f_1}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_1}{dc\,dy}\right) - \frac{d f_1}{d y}\left(\frac{d^2 f_2}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_2}{dc\,dy}\right)} \quad (14).$$

Or, on avait:

$$N = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p}{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q};$$

d'où l'on a, ayant regard à (12):

$$N \frac{d N}{d p} - \frac{d N}{d q} = 0;$$

et par suite l'équation (4) est satisfaite.

On a ensuite:

$$\frac{d N}{d x} + N \frac{d N}{d y} = -\frac{\Delta f}{\frac{d f}{d y}} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{d^2 f}{d c\, d x} + N \frac{d^2 f}{d c\, d y}\right)\left(\frac{d f_2}{d y} \Delta f_1 - \frac{d f_1}{d y} \Delta f_2\right)}{\frac{d f}{d y}\left[\frac{d f_2}{d y}\left(\frac{d^2 f_1}{dc\, dx} + N \frac{d^2 f_1}{dc\, dy}\right) - \frac{d f_1}{d y}\left(\frac{d^2 f_2}{dc\, dx} + N \frac{d^2 f_2}{dc\, dy}\right)\right]}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial N}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{d f}{d y}} - \frac{\left(\frac{d^2 f}{dc\, dx} + N \frac{d^2 f}{dc\, dy}\right)\left(\frac{d f_2}{d y} \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{d f_1}{d y} \frac{d f_2}{d z}\right)}{\frac{d f}{d y}\left[\frac{df_1}{d y}\left(\frac{d^2 f_2}{dc\, dx} + N \frac{d^2 f_2}{dc\, dy}\right) - \frac{df_2}{d y}\left(\frac{d^2 f_1}{dc\, dx} + N \frac{d^2 f_1}{dc\, dy}\right)\right]}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial q} = \frac{\frac{df_2}{d y} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial q} - \frac{df_1}{d y} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial q}}{\frac{df_1}{\partial z} \frac{df_2}{d y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{df_1}{d y}} + \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z} \Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z} \Delta f_1}{\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{df_2}{d y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{df_1}{dy}} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial q}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{\frac{df_2}{d y} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial p} - \frac{df_1}{d y} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial p}}{\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{df_1}{d y}} - \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z} \Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z} \Delta f_2}{N\left\{\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{df_2}{d y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{df_1}{d y}\right\}} + \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial p}. \quad (18)$$

D'autre part on a:

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial p} = 2 \frac{d^2 f}{dx\, dy} \frac{\partial N}{\partial p} + 2 N \frac{d^2 f}{dy^2} \frac{\partial N}{\partial p} + \frac{\partial d^2 f}{\partial p\, dx^2} + 2 N \frac{\partial d^2 f}{\partial p\, dx\, dy} + N^2 \frac{\partial d^2 f}{\partial p\, dy^2}$$

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial q} = 2\frac{d^2 f}{dx\,dy}\frac{\partial N}{\partial q} + 2N\frac{d^2 f}{dy^2}\frac{\partial N}{\partial q} + \frac{\partial d^2 f}{\partial q\,dx^2} + 2N\frac{\partial d^2 f}{\partial q\,dx\,dy} + N^2\frac{\partial\, d^2 f}{\partial q dy^2};$$

donc $\dfrac{\partial \Delta f}{\partial q} - N\dfrac{\partial \Delta f}{\partial p} = 0.$

L'équation de condition (3) est

$$\frac{d N}{d x} + N\frac{d N}{d y} - v\frac{d N}{d p} - \frac{\partial v}{\partial q} + N\frac{\partial v}{\partial p} = 0.$$

Si l'on y substitue les valeurs tirées de (15), (16), (17) et (18), on a, ayant regard à (12):

$$-\frac{\Delta f}{\frac{d f}{d y}} - 2\frac{\frac{\partial f_2}{\partial z}\Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Delta f_2}{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{d f_2}{d y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{d f_1}{d y}} + v\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{d f}{d y}} =$$

$$= -\frac{\Delta f}{\frac{df}{dy}} - \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z}\Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Delta f_2}{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{d f_2}{dy} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{d f_1}{dy}} = 0.$$

Il est ainsi satisfait à l'équation (3), et par là la proposition est démontrée.

APPLICATION

DE LA

MÉTHODE DE DARBOUX À L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $s = f(r, t)$

PAR

F. DE BOER.

Les pages suivantes contiennent le résultat d'une étude faite dans le but de rechercher jusqu'à quel point la méthode de Darboux peut servir à l'intégration de l'équation

$$s = f(r, t), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dans laquelle r, s, t ont la signification ordinairement admise:

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

J'ai cru utile de la publier parce que, à mon avis, le résultat est propre à faire ressortir la grande valeur de cette méthode qui me paraît être trop peu connue jusqu'ici.

Nous entendons par la méthode de Darboux pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, la méthode qui consiste à chercher les intégrales communes d'un système d'équations tel que

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dw}{dx}\right) + m_2\left(\frac{dw}{dy}\right) = \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\frac{df}{dr}}\frac{dw}{dr} + m_2\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\frac{df}{dt}}\frac{dw}{dt}, \ldots \\ &\frac{dw}{dr}m_1^2 - \frac{dw}{ds}m_1 + \frac{dw}{dt} = 0, \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

dans lequel

$$f = f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

représente l'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer, et $\left(\frac{df}{dx}\right)$ et $\left(\frac{df}{dy}\right)$ les dérivées prises en ce sens, que z, p et q soient considérés comme des fonctions de x et y, les r, s, t comme indépendants de ces variables. On a donc, par exemple,

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz} + r\frac{df}{dp} + s\frac{df}{dq};$$

tandis que m_1 et m_2 sont les racines de l'équation, dite caractéristique:

$$\frac{df}{dr}m^2 - \frac{df}{ds}m + \frac{df}{dt} = 0 \quad \text{. . . . . (3)}$$

Chaque intégrale du système (2) est en même temps une intégrale de l'équation différentielle donnée, si l'on étend la notion d'intégrale de manière que les intégrales de l'équation (1) puissent contenir aussi des dérivées du second ordre, — et même d'ordre supérieur, — tandis que, si $w_1 = c_1$, $w_2 = c_2$ sont des intégrales des équations (2), il en est de même de $w_1 = \varphi(w_2)$.

En permutant m_1 et m_2 on obtient un second système analogue à (2), et pouvant servir également à chercher des intégrales de l'équation différentielle donnée.

Pour l'intégration de (2) on a le système auxiliaire:

$$\frac{dx}{\frac{df}{dr}} = \frac{dy + m_1 dx}{\frac{df}{ds}} = \frac{m_1 dy}{\frac{df}{dt}} = \frac{dz}{\frac{df}{dr}(p + m_2 q)} = \frac{dp}{\frac{df}{dr}(r + m_2 s)} =$$

$$= \frac{dq}{\frac{df}{dr}(s + m_2 t)} = \frac{dr + m_1 ds}{-\left(\frac{df}{dx}\right)} = \frac{ds + m_1 dt}{-\left(\frac{df}{dy}\right)} \quad \text{. . . . . (4)}$$

Lorsque ce système auxiliaire a deux intégrales $w_1 = c_1$ et $w_2 = c_2$, une première intégrale de l'équation donnée, dans le sens adopté ici, sera $w_1 = \varphi(w_2)$.

Si le même cas se présente pour le second système auxi-

liaire, celui-ci donnera une deuxième intégrale, par exemple

$$w_1' = \psi(w_2').$$

Lorsque ces équations renferment $r, s, t,$ elles peuvent servir avec l'équation donnée, à déterminer des valeurs pour ces variables, qui substituées dans

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy, \quad dz = pdx + qdy,$$

transforment ces équations en un système intégrable d'équations différentielles simultanées.

Nous croyons pouvoir nous borner ici à ce résumé succinct de la méthode, en renvoyant le lecteur auquel elle ne serait pas suffisamment connue au mémoire de M. Darboux, inséré dans les *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, Tome VII, Année 1870; à celui de M. Hamburger dans le *Journal* de Kronecker, tome 93; et plus particulièrement au mémoire précédent de M. Speckman, ainsi qu'à un autre travail du même auteur intitulé „Integratie van de partieele differentiaalvergelijkingen van hoogere orde'' Groningen 1889, dans lequel l'auteur expose cette méthode p. 75 et suivantes.

Dans le cas de l'équation (1), les équations (2) deviennent

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) + m_2\left(\frac{dw}{dy}\right) = 0, \quad \frac{dw}{dr} m_1^2 - \frac{dw}{ds} m_1 + \frac{dw}{dt} = 0; \,.\,. \quad (5)$$

et, en posant $\frac{df}{dr} = R$, $\frac{df}{dt} = T$, la relation (4) se transforme en

$$\frac{dx}{R} = \frac{dy + m_1 dx}{-1} = \frac{m_1 dy}{T} = \frac{dz}{R(p + m_2 q)} = \frac{dp}{R(r + m_2 s)} =$$

$$= \frac{dq}{R(s + m_2 t)} = \frac{dr + m_1 ds}{0} = \frac{ds + m_1 dt}{0} \quad . \; . \; . \; (6)$$

Ce système peut s'écrire comme suit:

$$dz = pdx + qdy, \qquad dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy,$$
$$dr + m_1 ds = 0, \qquad ds + m_1 dt = 0, \qquad dy - m_2 dx = 0,$$
$$R m_1^2 + m_1 + T = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

En posant

$$u = p - rx - sy, \quad v = q - sx - ty,$$

une des équations (7) peut être remplacée par

$$du + m_1 dv = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

En effet, on a alors:

$$du = -xdr - yds, \quad dv = -xds - ydt;$$

et par suite:

$$du + m_1 dv = -x(dr + m_1 ds) - y(ds + m_1 dt) = 0.$$

Comme dans le cas présent, m_1 et m_2 ne dépendent que de r et t, on a toujours une équation intégrable, savoir

$$dr = m_1^2 dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

que l'on obtient en éliminant ds. De plus, comme toujours,

$$f = c$$

est une intégrale de (7), qui cependant ne peut évidemment pas servir à l'intégration de (1). En n'ayant pas égard à cette dernière, on a d'abord encore une deuxième intégrale, lorsque $m_1 = c$ est l'intégrale de l'équation (10). Alors

$$\frac{dm_1}{dt} + m_1^2 \frac{dm_1}{dr} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Pour que le même cas se présente avec le second système auxiliaire, il faut la relation

$$\frac{dm_2}{dt} + m_2^2 \frac{dm_2}{dr} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

L'addition de ces équations donne:

$$\frac{d(m_1 + m_2)}{dt} + \tfrac{1}{2} \frac{d(m_1^3 + m_2^3)}{dr} = 0.$$

Introduisant les valeurs

$$(m_1 + m_2) = -\frac{1}{R}, \quad m_1 m_2 = \frac{T}{R}, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

on obtient après réduction:

$$2R^2 \frac{dR}{dt} + (1 - 2RT) \frac{dR}{dr} = 0.$$

Prenant encore la somme de (11) et (12), après avoir divisé la première par m_1^2, la seconde par m_2^2, il vient

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\frac{d}{dr}(m_1+m_2)=0,$$

ou

$$R^2\frac{dT}{dt}=T^2\frac{dR}{dr}.$$

Ces deux équations peuvent se représenter par

$$\frac{\frac{dT}{dt}}{T^2}=\frac{\frac{dR}{dr}}{R^2}=\frac{2\frac{dT}{dr}}{2RT-1}=\frac{2\frac{dR}{dt}}{2RT-1}, \quad \ldots\ldots (14)$$

d'où l'on peut déduire:

$$\frac{d\left(\frac{1-4RT}{R^2}\right)}{dr}=\frac{d\left(\frac{1-4RT}{T^2}\right)}{dt}=0; \quad \ldots (15)$$

de sorte que $\frac{1-4RT}{R^2}$ est une fonction de t seul, et $\frac{1-4RT}{T^2}$ de r seul. Nous représentons la première par τ^4, la seconde par ϱ^4. La résolution donne alors

$$R=\frac{\varrho}{\tau\sqrt{(4+\varrho^2\tau^2)}}, \quad T=\frac{\tau}{\varrho\sqrt{(4+\varrho^2\tau^2)}}.$$

Il faut ensuite que $\frac{dR}{dt}$ soit égal à $\frac{dT}{dr}$, d'où l'on tire

$$\frac{\frac{d\varrho}{dr}}{\varrho^3}=\frac{\frac{d\tau}{dt}}{\tau^3}.$$

Les deux membres devant évidemment être égaux à une même constante, on aura: $\frac{d}{dr}\frac{1}{\varrho^2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{\tau^2}=c,$

ou

$$\varrho=\frac{1}{\sqrt{(cr+c_1)}}, \quad \tau=\frac{1}{\sqrt{(ct+c_2)}}.$$

On en déduit

$$R = \frac{ct + c_2}{\sqrt{(4c_1c_2 + 1 + 4cc_2r + 4cc_1t + 4c^2rt)}};$$

donc

$$s = f(r, t) = \int \frac{(ct + c_2)\,dr}{\sqrt{(4c_1c_2 + 1 + 4cc_2r + 4cc_1t + 4c^2rt)}}.$$

Si l'on introduit de nouvelles constantes, en posant

$$\frac{c_1c_2 + {}^1/_4}{c^2} = a\,, \quad \frac{c_2}{c} = b\,, \quad \frac{c_1}{c} = e\,,$$

et si l'on désigne par $-\, ½\, c$ la constante qu'il faut ajouter à s, on a:

$$s - ½\, c = \sqrt{(a + br + et + rt)},$$

ou

$$a + br + cs + et - (s^2 - rt) = {}^1/_4\, c^2.$$

L'équation d'A m p è r e à coefficients constants est donc la seule dans laquelle se présente le cas considéré.

L'un des deux systèmes auxiliaires a les intégrales

$$m_1 = C_1\,, \quad u + m_1v = C_1';$$

l'autre

$$m_2 = C_2\,, \quad u + m_2v = C_2'.$$

L'équation donnée possède donc les premières intégrales:

$$u + m_1v = \varphi(m_1), \quad u + m_2v = \psi(m_2).$$

Comme m_1 et m_2 sont des fonctions de r et t déterminées par les équation (13), on peut, au moyen des deux intégrales trouvées et de l'équation différentielle donnée, résoudre r, s et t. Toutefois il est préférable de tout exprimer en m_1 et m_2, par exemple de la manière suivante:

Si, pour abréger, on pose $\sqrt{(a - be)} = Q$, les équation (13) et l'équation à intégrer donnent

$$r + e = \frac{2m_1m_2}{m_1 - m_2}\,Q;\; s - ½\, c = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\,Q;\; t + b = \frac{2}{m_1 - m_2}\,Q;$$

d'où l'on tire

$$r + m_1 s = -m_1 Q - e + ½\, m_1 c; \quad s + mt = Q + ½\, c - m_1 b;$$

donc

$$dr + m_1\, ds = d(r + m_1\, s) - s\, dm_1 =$$
$$= -Q\, dm_1 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\, Q\, dm_1 = \frac{2\, m_2\, Q}{m_1 - m_2}\, dm_1;$$
$$ds + m_1\, dt = d(s + m_1\, t) - t\, dm_1 = \frac{-2\, Q}{m_1 - m_2}\, dm_1.$$

De plus, on a
$$du = -x\, dr - y\, ds; \quad dv = -x\, ds - y\, dt;$$
donc
$$du + m_1\, dv = -x\, (dr + m_1\, ds) - y\, (ds + m_1\, dt)$$
$$= -\frac{2\, (m_2\, x - y)\, Q}{m_1 - m_2}\, dm_1;$$
et
$$d(u + m_1\, v) = \varphi'(m_1)\, d\, m_1 = -\frac{2\, (m_2\, x - y)\, Q}{m_1 - m_2}\, dm_1 + v\, dm_1;$$
de sorte que
$$\frac{2\, (m_2\, x - y)}{m_1 - m_2}\, Q = v - \varphi'(m_1); \text{ et de même}$$
$$\frac{2\, (m_1\, x - y)}{m_1 - m_2}\, Q = v - \psi'(m_2).$$

De ces deux dernières équations on déduit, si l'on substitue encore à v sa valeur $\frac{\varphi - \psi}{m_1 - m}$,
$$x = \frac{\varphi' - \psi'}{2\sqrt{(a - b\, e)}}, \quad y = \frac{\psi - \varphi - m_2\, \psi' + m_1\, \varphi'}{2\sqrt{(a - b\, e)}}.$$
En outre on a
$$p = u + xr + ys = \tfrac{1}{2}\, (\varphi + \psi - m_1\, \varphi' - m_2\, \psi') - ex + \tfrac{1}{2}\, cy,$$
$$q = v + xs + yt = \tfrac{1}{2}\, (\varphi' + \psi') + \tfrac{1}{2}\, cx - by\,,$$
et finalement
$$z + \tfrac{1}{2}(ex^2 - cxy + by^2) =$$
$$\frac{(m_1 - m_2)\varphi'\psi' + \psi\,\varphi' - \psi'\varphi + \int \varphi\varphi'' dm_1 - \int \psi'\varphi\, dm_2}{4\sqrt{(a - be)}}$$

On obtient des formules plus simples, exemptes de signes d'intégration, en posant :

$$\frac{\varphi'(m_1)}{2\sqrt{(a-be)}} = \alpha,\ m_1 = \chi''(\alpha),\ \frac{\psi'(m_2)}{2\sqrt{(a-be)}} = \beta,\ m_2 = \omega''(\beta).$$

On a ainsi:

$$x = \alpha - \beta\,,\quad y = \chi'(\alpha) - \omega'(\beta)\,,$$

$$z + \tfrac{1}{2}(ex^2 - cxy + by^2) = \{2\,\omega - 2\,\chi - (\alpha+\beta)(\omega' - \chi')\}\sqrt{(a-be)}.$$

Il y a encore un autre cas, où les equations (15) sont satisfaites, c'est lorsque

$$R\,T = {}^1\!/_4,\ \text{et par suite}\ m_1 = m_2 = m.$$

Dans ce cas il n'y a qu'un seul système auxiliaire, mais on peut ici en indiquer immédiatement trois combinaisons intégrables, savoir:

$$dr - m^2\,dt = 0\,,\quad dy - mdx = 0\,,\quad du + mdv = 0\,,$$

dont les intégrales sont

$$m = c\,,\quad y - mx = c'\,,\quad u + mv = c''.$$

Alors

$$y - mx = \varphi(m)\,,\quad u + mv = \psi(m). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

sont des intégrales de l'équation (1),

L'équation donnée doit être ici de la forme

$$s = -\frac{1}{2}mt - \frac{1}{2m}r + \chi(m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

où χ est une fonction arbitraire, et m determiné par la relation

$$m^2 t - r = 2m^2\,\chi'(m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ainsi qu'il résulte de l'intégration de l'équation $RT = \frac{1}{4}$, considérée comme équation différentielle du premier ordre en f, r et t.

On peut s'assurer facilement que dans (17) et (18) m a la même signification que dans ce qui précède.

Tâchons maintenant d'exprimer le tout en fonction de m et de x.

On tire de (17) et (18)

$$r + ms = m\,\chi - m^2\,\chi'\,;\quad s + mt = \chi + m\,\chi'; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

tandis qu'en différentiant (16) on trouve

$$dy = m\,du + (x + \varphi')\,dm$$
$$\text{et}\quad du + m\,dv = (\psi' - v)\,dm\,;$$

ou, vu que $du = -x\,dr - y\,ds$, $dv = -x\,ds - y\,dt$,

$$x\,(dr + m\,ds) + y\,(ds + m\,dt) = (v - \psi')\,dm.$$

On déduit d'ailleurs de (19) :

$$dr + m\,ds = d\,(r + ms) - s\,dm = (\chi - m\,\chi' - m^2\,\chi'' - s)\,dm$$
$$\text{et } ds + m\,dt = d\,(s + mt) - t\,dm = (2\,\chi' + m\,\chi'' - t)\,dm.$$

Introduisant ceci et divisant par dm, on trouve :

$$x\,(\chi - m\,\chi' - m^2\,\chi'' - s) + y\,(2\,\chi' + m\,\chi'' - t) = v - \psi'\,;$$

ou, remplaçant y et v par leur valeur et résolvant par rapport à q ;

$$q = \psi' + x\,(\chi + m\,\chi') + (2\,\chi' + m\,\chi'')\,\varphi \quad . \;. \;. \;. \quad (20)$$

D'autre part, on a $dz = p\,dx + q\,dy = (p + mq)\,dx + (x + \varphi')\,q\,dm$.

Il résulte de la seconde équation (16) que

$$p + mq = (r + ms)\,x + (s + mt)\,y + \psi = x(m\chi - m^2\chi') + y(\chi + m\chi') + \psi\,;$$

ou $p + m\,q = 2\,x\,m\,\chi + \varphi\,(\chi + m\,\chi') + \psi$.

Substituant cette valeur et celle de q déduite de (20), on trouve enfin :

$$dz = \{2\,xm\,\chi + \varphi\,(\chi + m\chi') + \psi\}\,dx + (x + \varphi')\,\{\psi' + x\,(\chi + m\chi') + (2\chi' + m\chi'')\,\varphi\}\,dm\,;$$

d'où, en intégrant

$$z = m\chi x^2 + \{\psi + \varphi\,(\chi + m\chi')\}\,x + \int \varphi'\,\{\psi' + \varphi\,(2\chi' + m\chi'')\}\,dm.$$

Cette valeur peut se réduire à

$$z = m\chi x^2 + \{\psi + \varphi(\chi + m\chi')\}(x + \varphi') - m\chi\varphi'^2 - \int \varphi''\,\{\psi + \varphi(\chi + m\chi') - 2m\varphi'\chi\}\,dm.$$

Pour simplifier, introduisons une nouvelle fonction en posant :

$$\omega' = \varphi''\,\{\psi + \varphi\,(\chi + m\chi') - 2m\varphi'\chi\},$$

ce qui met l'intégrale sous la forme

$$\left.\begin{aligned} y &= m x + \varphi(m), \\ z &= m \chi(m) (x + \varphi'(m))^2 + \frac{\omega'(m)}{\varphi''(m)} (x + \varphi'(m)) - \omega(m) \end{aligned}\right\} \ldots (21)$$

Les équations (21) représentent l'intégrale générale pour toutes les équations possibles de la forme (1), dont l'équation caractéristique a deux racines égales. La fonction χ figure dans l'équation différentielle même, les deux autres y sont introduites par l'intégration.

Un troisième cas d'intégrabilité se présente si $m^2 = c$ est l'intégrale de (10), et que réciproquement $dr = m_2{}^2\, dt$ a pour intégrale $m_1 =$ const. On aura alors nécessairement:

$$\frac{dm_1}{dt} + m_2{}^2 \frac{dm_1}{dr} = 0, \quad \frac{dm_2}{dt} + m_1{}^2 \frac{dm_2}{dr} = 0 \quad . \; . \; (22)$$

En ajoutant ces équations, on obtient

$$\frac{d\left(-\frac{1}{R}\right)}{dt} + \frac{T^2}{R^2} \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dr} = 0,$$

ce que l'on reconnaît être une identité en réduisant.

Les équations (22) ne sont donc pas indépendantes l'une de l'autre. Si on multiplie la première par m_1 et la seconde par m_2, et qu'on additionne membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d(m_1{}^2 + m_2{}^2)}{dt} + m_1 m_2 \frac{d(m_1 m_2)}{dr} = 0,$$

ou, après réduction

$$T^2 \frac{dR}{dr} + R^2 \frac{dT}{dt} + (1 - 2RT) \frac{dR}{dt} = 0 \quad . \; . \; . \; (23)$$

Telle est dans ce cas la seule condition à laquelle l'équation différentielle doit satisfaire.

L'équation (23) est elle-même une équation différentielle du second ordre en s ou f comme variable dépendante, et en r et t comme variables indépendantes. La forme générale de l'équation différentielle peut encore être déterminée comme dans

les deux cas précédents, cette fois-ci par l'intégration de l'équation (23).

Pour procéder à cette intégration, nous remplaçons r, t et s pour un instant par x, y et z, et nous employons les notations ordinaires pour les dérivées du premier et du second ordre de ce z particulier par rapport à cet x et cet y. L'équation (23) devient ainsi

$$q^2 r + (1 - 2pq) s + p^2 t = 0 \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

L'équation caractéristique de cette dernière est

$$q^2 \mu^2 - (1 - 2pq) \mu + p^2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

dont μ_1 et μ_2 sont les deux racines.

Pour intégrer, on emploie encore la méthode de Darboux. Nous avons comme premier système auxiliaire:

$$\frac{dx}{q^2} = \frac{dy + \mu_1 dx}{1 - 2pq} = \frac{\mu_1 dy}{p^2} = \frac{dz}{q^2(p + \mu_2 q)} = \frac{dp}{q^2(r + \mu_2 s)} =$$
$$= \frac{dq}{q^2(s + \mu_2 t)} = \frac{dr + \mu_1 ds}{-2p(rt - s^2)} = \frac{ds + \mu_1 dt}{-2q(rt - s^2)}. \quad (27)$$

Et comme, d'après (24) et (25), $r + (\mu_1 + \mu_2) s + \mu_1 \mu_2 t = 0$, on trouve

$$dp + \mu_1 dq = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

équation intégrable à coup sûr, puisque μ_1 dépend uniquement de p et q. On déduit aisément de (25):

$$\frac{d\mu_1}{dq} = \mu_1 \frac{d\mu_1}{dp};$$

donc

$$\mu_1 = c$$

est l'intégrale de (28). Si l'on pose encore $s + \mu_1 t = \lambda_1$, on a

$$ds + \mu_1 dt = d\lambda_1,$$

$$\frac{d\lambda_1}{rt - s^2} = - \frac{2dq}{q(s + \mu_2 t)},$$

ou, puisque $rt - s^2 = -(s + \mu_2 t)(s + \mu_1 t)$,

$$\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{2dq}{q}.$$

Une autre intégrale du système (27) est donc

$$\lambda_1 = c_1 q^2.$$

Par conséquent une première intégrale de (24) est

$$\lambda_1 = q^2 \chi(\mu_1) \quad \text{ou} \quad s + \mu_1 t = q^2 \chi(\mu_1).$$

L'autre système auxiliaire nous donne de même

$$s + \mu_2 t = q^2 \omega(\mu_2).$$

Et si l'on considère que

$$r + \mu_1 s = -\mu_2 (s + \mu_1 t), \; r + \mu_2 s = -\mu_1 (s + \mu_2 t),$$

on trouve:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{q^2}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_2{}^2 \chi(\mu_1) - \mu_1{}^2 \omega(\mu_2)), \\ s &= -\frac{q^2}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_2 \chi(\mu_1) - \mu_1 \omega(\mu_2)), \\ t &= \frac{q^2}{\mu_1 - \mu_2} (\chi(\mu\ ) - \omega(\mu\ )). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (29)$$

De

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad \text{et} \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

il résulte que

$$dx = \frac{t\,dp - s\,dq}{rt - s^2}, \quad dy = \frac{r\,dq - s\,dp}{rt - s^2}; \quad \ldots \ldots (30)$$

tandis qu'on déduit aisément de (25)

$$p = \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad \ldots \ldots (31)$$

Substituant dans (29) et (30), il vient

$$dx = \frac{d\mu_1}{2\chi\sqrt{\mu_1}} - \frac{d\mu_2}{2\omega\sqrt{\mu_2}}, \quad dy = \frac{d\mu_1 \sqrt{\mu_1}}{2\chi} - \frac{d\mu_2 \sqrt{\mu_2}}{2\omega},$$

et

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{d\mu_1}{2\chi} - \frac{d\mu_2}{2\omega}.$$

Enfin, si l'on remplace $\sqrt{\mu_1}$ par $-\frac{1}{m_1}$, $\sqrt{\mu_2}$ par $-\frac{1}{m_2}$,

$\frac{\mu_1^2}{\chi(\mu_1)}$ par $-\chi'''(m_1)$ et $\frac{\mu_2^2}{\omega(\mu_2)}$ par $-\omega'''(m_2)$, on obtient

$$dx = m_1^2\,\chi'''(m_1)\,dm_1 + m_2^2\,\omega'''(m_2)\,dm_2,$$
$$dy = \chi'''(m_1)\,dm_1 + \omega'''(m_2)\,dm_2,$$
$$dz = -m_1\,\chi'''(m_1)\,dm_1 - m_2\,\omega'''(m_2)\,dm_2;$$

donc, si nous remplaçons de nouveau x, y et z par r, t et s:

$$\left.\begin{aligned} r &= m_1^2\,\chi'' - 2\,m_1\,\chi' + 2\,\chi + m_2^2\,\omega'' - 2\,m_2\,\omega' + 2\,\omega,\\ s &= -m_1\,\chi'' + \chi' - m_2\,\omega'' + \omega',\\ t &= \chi'' + \omega''. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Donc, pour que le cas d'intégrabilité traité ici se présente, l'équation (1) doit être le résultat de l'élimination de m_1 et m_2 entre les trois équations (32).

Les valeurs m_1 et m_2 des éq. (32) sont les racines de l'équation

$$R\,m^2 + m + T = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

ce qu'on déduit aisément de (25), si l'on considère que p et q dans cette équation ne sont autre chose que R et T. Or l'équation (33) est l'équation caractéristique de (1).

Le système (7) donne, dans ce cas, les intégrales $m_2 = c$ et $y - m_2\,x = c'$, de sorte qu'une intégrale première de (1) est

$$y - m_2\,x = \varphi(m_2),$$

et une autre naturellement

$$y - m_1\,x = \psi(m_1);$$

d'où il suit que

$$x = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2}, \quad y = \frac{m_1\,\varphi - m_2\,\psi}{m_1 - m_2} \quad \ldots\ldots (34)$$

Maintenant à l'aide de (32) nous pouvons aussi exprimer z en fonction de m_1 et m_2. On a en effet:

$$\frac{dp}{dm_1} = r\,\frac{dx}{dm_1} + s\,\frac{dy}{dm_1}, \quad \frac{dq}{dm_1} = s\,\frac{dx}{dm_1} + t\,\frac{dy}{dm_1}.$$

Mais

$$\frac{dy}{dm_1} = m_2\,\frac{dx}{dm_1};$$

donc

$$\frac{dp}{dm_1} = (r + m_2 s) \frac{dx}{dm_1}, \text{ et de même } \frac{dp}{dm_2} = (r + m_1 s) \frac{dx}{dm_2}.$$

On en déduit:

$$p = \int (r + m_2 s) \frac{dx}{dm_1} dm_1 = x(r + m_2 s) - \int x m_1 (m_1 - m_2) \chi''' dm_1,$$

où la constante d'intégration est évidemment une fonction de m_2.

Substituant pour x, r et s leur valeur on a

$$p = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2}(2\chi - m_1\chi' + 2\omega - m_2\omega') - \psi(m_1\chi'' - \chi') - \varphi(m_2\omega'' - \omega')$$
$$+ \int \psi \chi''' m_1 dm_1 + \int \varphi \omega''' m_2 dm_2,$$

où l'on a ajouté les termes qui dépendent uniquement de m_2, parce qu'il doit y avoir symétrie en ce qui concerne m_1 et m_2.

On trouve de même

$$q = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2}(\chi' + \omega') + \psi \chi'' + \varphi \omega'' - \int \psi \chi''' dm_1 - \int \varphi \omega''' dm_2.$$

Enfin, on a:

$$z = \int \frac{dz}{dm_1} dm_1 = \int \left(p \frac{dx}{dm_1} + q \frac{dy}{dm_1} \right) dm_1 = \int (p + m_2 q) \frac{dx}{dm_1} dm_1 =$$

$$= x(p + m_2 q) - \int x \left(\frac{dp}{dm_1} + m_2 \frac{dq}{dm_1} \right) dm_1 =$$

$$= x(p + m_2 q) - \int (r + 2 m_2 s + m_2^2 t) x \frac{dx}{dm_1} =$$

$$x(p + m_2 q) - \tfrac{1}{2}(r + 2 m_2 s + m_2^2 t) x^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} \int x^2 \left(\frac{dr}{dm_1} + 2 m_2 \frac{ds}{dm_1} + m_2^2 \frac{dt}{dm_1} \right) dm_1 =$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 (r + 2 m_2 s + m_2^2 t) + x \left\{ \varphi \omega' - m_2 \int \varphi \omega''' dm_2 + \int m_2 \varphi \omega''' dm_2 \right\}$$

$$- x \int (\varphi - \psi)(m_1 - m_2) \chi''' dm_1 + \tfrac{1}{2} \int (\varphi - \psi)^2 \chi''' dm_1 =$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{(\varphi - \psi)^2}{(m_1 - m_2)^2} \left\{ (m_1 - m_2)^2 \chi'' - 2(m_1 - m_2)\chi' + 2\chi + 2\omega \right\} -$$

$$-\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\int(\varphi-\psi)(m_1-m_2)\chi'''\,d\,m_1$$

$$+\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}(\varphi\omega'+\int m_2\varphi\omega'''dm_2-m_2\int\varphi\omega'''dm_2)+\tfrac{1}{2}\int(\varphi-\psi)^2\chi'''dm_1.$$

Réduisant et ajoutant des termes, dépendants de m_2 seulement, pour obtenir la symétrie nécessaire, on a enfin

$$z=\left(\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\right)^2(\chi+\omega)+\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\{\psi\chi'+\varphi\omega'+\int m_1\psi\chi'''dm_1-m_1\int\psi\chi'''dm_1$$

$$+\int m_2\varphi\,\omega'''d\,m_2-m_2\int\varphi\,\omega'''d\,m_2\}+\tfrac{1}{2}\int\psi^2\chi'''d\,m_1+\tfrac{1}{2}\int\varphi^2\omega'''d\,m_2$$

$$+\tfrac{1}{2}\psi^2\chi''+\tfrac{1}{2}\varphi^2\omega''-\psi\int\psi\,\chi'''\,d\,m_1-\varphi\int\varphi\,\omega'''\,dm_2\,.\;.\;.\quad(35)$$

Les trois équations (34) et (35) représentent ensemble l'intégrale générale de toutes les équations de la forme (1) qui satisfont à la condition (23), excepté seulement celles qui sont comprises dans les deux cas traités précédemment, ainsi que celles où m_1 et m_2 ont des valeurs constantes; ces derniers cas sont traités ci-après.

On aurait encore un cas d'intégrabilité si, en égalant m_1 et m_2 à une constante, on obtenait des intégrales de (10) et que, par conséquent, m_2 fût une fonction de m_1. Mais nous avons vu que les équations (22) se déduisent l'une de l'autre. Donc, non seulement l'équation (11) et l'une des équations (22) seraient satisfaites, mais encore l'autre équation (22) et l'équation (12), et il en résulterait que ou bien $m_1{}^2=m_2{}^2$ et par suite $m_1=m_2$ puisque $m_1=-m_2$ ne peut avoir lieu ici, ou bien que m_1 et m_2 ont des valeurs constantes, ou enfin que l'une d'elles est égale à zéro,

Dans ce dernier cas, l'équation différentielle ne contiendrait pas t. Appelons donc m_2 la racine de l'équation caractéristique, qui disparaît; le premier système auxiliaire prend alors la forme

$$\frac{d\,x}{1}=\frac{d\,y}{0}=\frac{d\,z}{p}=\frac{d\,p}{r}=\frac{d\,q}{s}=\frac{d\,r+m_1\,d\,s}{0}=\frac{d\,s+m_1\,d\,t}{0},$$

et donne, entre autres, les intégrales suivantes

$$y = c\,,\ t = \int \frac{d\,r}{m_1^{\,2}} + c' = \int f'(r)^2\, d\,r + c'.$$

La première intégrale de l'équation différentielle est donc

$$t = \int f'(r)^2\, d\,r + \psi''(y)\,,$$

tandis que le second système auxiliaire a toujours pour intégrale

$$y - m_1\, x = \varphi\,(m_1).$$

Nous pourrons mettre cette dernière sous la forme

$$x + y\, f'(r) = \chi'(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

On a ainsi:

$$d\,p = r\,d\,x + s\,d\,y = r\,\{(\chi''(r) - y\,f''(r))\,d\,r - f'(r)\,d\,y\} + f(r)\,dy$$

ou

$$d\,p = \{r\,\chi''(r) - y\,r\,f''(r)\}\,d\,r + \{f(r) - r\,f'(r)\}\,d\,y\,;$$

et de même

$$d\,q = \{f(r)\,\chi''(r) - y\,f(r)\,f''(r)\}\,d\,r + \{\psi''(y) - \int f(r)\,f'(r)\,d\,r\}\,d\,y.$$

Intégrant ces deux équations on obtient

$$p = y\,(f - rf') + r\,\chi' - \chi,\ q = -\,y \int f f''\,d\,r + \psi'(y) + \int f\,\chi''\,d\,r\,;$$

par conséquent

$$d\,z = p\,d\,x + q\,d\,y = \{\,y\,(f - r\,f') + r\,\chi' - \chi\,\}(\chi'' - y\,f'')\,d\,r -$$

$$- \{y\,(f f' - r\,f'^2) + r\,f'\,\chi' - \chi\,f' + y \int f f''\,d\,r - \int f\,\chi''\,dr - \psi'(y)\}\,dy,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$z = -\tfrac{1}{2}\,y^2\,\{f f' - r\,f'^2 + \int f f''\,d\,r\} + y\,\{\chi\,f' - r\,\chi'\,f' + \int f\,\chi''\,dr\} +$$

$$+ \int (r\,\chi' - \chi)\,\chi''\,d\,r + \psi\,(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Dans ce cas l'intégrale est donnée par (36) et (37).

L'équation

$$s = f\,(t),$$

qui correspond à $m_2 = \infty$, peut évidemment être traitée de la même manière.

Si les quantités m_1 et m_2 sont constantes toutes les deux, l'équation (1) prend la forme:

$$s = a\,r + b\,t + e.$$

Le premier système auxiliaire donne alors les intégrales

$$y - m_2\,x = c, \quad u + m_1\,v = c';$$

mais il est à remarquer que dans ce cas il existe d'autres intégrales, qui se présentent moins immédiatement mais conduisants plus rapidement à l'intégrale finale. Le premier système auxiliaire est encore vérifié par

$$p + m_1\,q - (m_1\,x + y)\,e = c'';$$

une premier intégrale est donc

$$p + m_1\,q = (m_1\,x + y)\,e + \varphi\,(y - m_2\,x),$$

et il en est de même évidemment de

$$p + m_2\,q = (m_2\,x + y)\,e + \psi\,(y - m_1\,x).$$

Les valeurs de p et de q, tirées de là et substituées dans $dz = p\,dx + q\,dy$, donnent, si nous introduisons pour φ et ψ d'autres fonctions,

$$dz = (ydx + xdy)\,e + \psi'(y - m_1 x)d(y - m_1 x) + \varphi'(y - m_2 x)d(y - m_2 x),$$

donc

$$z = e\,x\,y + \psi\,(y - m_1\,x) + \varphi\,(y - m_2\,x) \quad . \; . \; . \; . \; (38)$$

On sait que ce résultat peut être obtenu aussi par la méthode de Monge; cette méthode est du reste absolument la même que celle que nous venons de suivre, du moment que l'on a affaire à des équations linéaires et que l'on peut éviter d'introduire des intégrales qui contiennent r, s ou t.

Si les quantités m_1 et m_2 n'étaient pas seulement constantes mais encore égales entre elles, alors ni (38) ni (21) ne pourraient plus servir. Dans ce cas le système auxiliaire a toute une série d'intégrales, dont nous pourrons encore laisser de côté celles qui contiennent r, s ou t.

Nous conservons donc

$$y - m x = c, \; p + m q = e(m x + y) + c'$$

et

$$z - (p + m q) x + e m x^2 = c''.$$

Dans ce cas nous avons ainsi pour intégrales de l'équation différentielle

$$p + m q = e(m x + y) + \varphi(y - m x),$$
$$z = (p + m q) x - e m x^2 + \psi(y - m x).$$

L'élimination de $p + m q$ donne l'intégrale finale

$$z = e x y + x \varphi(y - m x) + \psi(y - m x).$$

Il ne serait pas facile de découvrir, au premier coup d'œil, d'autres cas d'intégrabilité que ceux que nous venons de traiter. La methode de Jacobi nous donne cependant le moyen de rechercher directement s'il en existe encore. Nous allons appliquer cette methode aux deux équations (5), et de cette façon, déterminer le nombre des intégrales communes, dans les différents cas.

Si nous représentons symboliquement les deux équations par

$$\Delta_1 w = 0 \quad \text{en} \quad \Delta_2 w = 0,$$

nous aurons à faire subir aux coefficients de la première l'opération exprimée par le symbole Δ_2, et sur ceux de la seconde l'opération exprimée par Δ_1, puis à prendre la différence entre les deux résultats.

En développant les équations (5), on trouve

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + m_2\frac{dw}{dy} + (p + m_2 q)\frac{dw}{dz} + (r + m_2 s)\frac{dw}{dp} + (s + m_2 t)\frac{dw}{dq} = 0, \\ m_1{}^2\frac{dw}{dr} - m_1\frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

L'opération de Jacobi appliquée à ces équations donne:

$$\frac{dw}{dy}\left(\frac{dm_2}{dr} m_1{}^2 + \frac{dm_2}{dt}\right) + \frac{dw}{dz} q \left(\frac{dm_2}{dr} m_1{}^2 + \frac{dm_2}{dt}\right) +$$

$$+ \left\{ (m_1{}^2 - m_1 m_2) + s\left(\frac{d\,m_2}{d\,r} m_1{}^2 + \frac{d\,m_2}{d\,t}\right) \right\} \frac{d\,w}{d\,p}$$

$$+ \left\{ (m_2 - m_1) + t\left(\frac{d\,m_2}{d\,r} m_1{}^2 + \frac{d\,m_2}{d\,t}\right) \right\} \frac{d\,w}{d\,q} = 0. \quad . \ (40)$$

D'abord, si $m_1 = m_2$, on a aussi $\frac{d\,m_2}{d\,r} m_1{}^2 + \frac{d\,m_2}{d\,t} = 0$,

et l'équation (40) devient une identité. Dans ce cas les équations (39) ont le plus grand nombre possible d'intégrales communes, à savoir six. L'une d'elles est comme toujours l'équation différentielle originelle, où le second membre 0 est remplacé par une constante arbitraire. Des cinq autres nous avons déjà donné les trois suivantes :

$$m = c, \quad y - m\,x = c', \quad u + m\,v = c''.$$

Les autres sont

$$r + m\,s = c''', \ z - (p + mq)\,x + \tfrac{1}{2}\,x^2\,(r + 2\,m\,s + m^2\,t) = c''''.$$

Si dans une de ces intégrales le premier membre devenait égal à une constante, il viendrait de ce fait une autre intégrale à sa place ; ainsi, par exemple, si m était une constante, on aurait

$$p + m\,q - e\,(m\,x + y) = c'''''.$$

En second lieu si

$$\frac{d\,m_2}{d\,r} m_1{}^2 + \frac{d\,m_2}{d\,t} = 0,$$

sans que l'on ait $m_1 = m_2$, (40) se transforme en

$$\frac{d\,w}{d\,p} m_1 - \frac{d\,w}{d\,q} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ (41)$$

ce qui fait une nouvelle équation à ajouter à celles du système (39). Maintenant en aucun cas le nombre des intégrales, y compris l'équation $f = c$, ne peut dépasser cinq. En appliquant l'opération à ces équations prises deux à deux, on trouve

$$\frac{d\,w}{d\,p}\left(\frac{d\,m_1}{d\,r} m_1{}^2 + \frac{d\,m_1}{d\,t}\right) = 0\,, \quad \ldots \ (42)$$

$$\frac{d\,w}{d\,z}(m_1 - m_2) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ (43)$$

Si l'on avait maintenant $\frac{dm_1}{dr} m_1^2 + \frac{dm_1}{dt} = 0$, m_1 et m_2 seraient constants, et le système se composerait encore des quatre équations (39), (41) et (43), qui par de nouvelles applications de l'opération précédente ne donneraient plus de nouvelles équations. En dehors de (1), il y aurait donc encore trois intégrales, qui toutes ont déjà été données précédemment (p. 371), à savoir

$$y - m_2 x = c, \quad u + m_1 v = c', \quad p + m_1 q - e(m_1 x + y) = c''.$$

Si dans l'équation (42) le second facteur n'était pas égal à zéro, le système se réduirait à

$$\frac{dw}{dx} + m_2 \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dr} m_1^2 - \frac{dw}{ds} m_1 + \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dp} = \frac{dw}{dq} = 0.$$

Ce système ne comporte, en dehors de (1), tout au plus que deux intégrales, dont ni l'une ni l'autre ne peuvent contenir z, p, ou q. On n'en déduit que cette seule équation:

$$\frac{dw}{dz}\left(\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt}\right) = 0,$$

ce qui est une identité, d'après les hypothèses que nous avons faites. Ces deux intégrales existent donc réellement, comme nous le savions déjà; nous avons en effet trouvé dans ce cas $m_2 = c$, $y - m_2 x = c'$; ou bien, si $m_2 = 0$, $y = c$, $t = \int f'^2(r)\, dr + c'$.

Il reste encore à considérer le cas où $\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt}$ diffère de zéro. Divisons (40) par cette expression et écrivons pour abréger

$$\frac{m_1 - m_2}{\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt}} = L;$$

il vient

$$\frac{dw}{dy} + q \frac{dw}{dz} + (s + m_1 L) \frac{dw}{dp} + (t - L) \frac{dw}{dq} = 0; \quad . \quad (44)$$

et, en multipliant par m_1, puis retranchant de la première équation (39), on trouve

$$\frac{dw}{dx} + p\frac{dw}{dz} + (r - m_1 m_2 L)\frac{dw}{dp} + (s + m_2 L)\frac{dw}{dq} = 0 \,. \quad (45)$$

Le système se compose donc maintenant de la seconde équation (39) et de (44) et (45). Les deux dernières équations donnent

$$(m_1 - m_2) L \frac{dw}{dz} = 0 ; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

puis en combinant successivement (44) et (45) avec la seconde équation de (39) et représentant l'opération $m_1^2 \frac{d}{dr} + \frac{d}{dt}$ par Λ, on obtient

$$(-m_1 + L\Lambda m_1 + m_1 \Lambda L)\frac{dw}{dp} + (1 - \Lambda L)\frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\{m_1^2 - L(m_1 \Lambda m_2 + m_2 \Lambda m_1) - m_1 m_2 \Lambda L\}\frac{dw}{dp} +$$

$$+ (-m_1 + L\Lambda m_2 + m_2 \Lambda L)\frac{dw}{dq} = 0.$$

Remarquons que puisque $L\Lambda m_2 = m_1 - m_2$, ces deux équations ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'elles ne donnent ensemble qu'une seule équation nouvelle. Le système à intégrer est maintenant devenu

$$\frac{dw}{dx} + (r - m_1 m_2 L)\frac{dw}{dp} + (s + m_2 L)\frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\frac{dw}{dy} + (s + m_2 L)\frac{dw}{dp} + (t - L)\frac{dw}{dq} \ldots\ldots \quad (47)$$

$$(K_1 - m_1)\frac{dw}{dp} + \frac{dw}{dq} = 0,\ m_1^2\frac{dw}{dr} - m_1\frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0,\ \frac{dw}{dz} = 0;$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$K_1 = \frac{L\Lambda m_1}{1 - \Lambda L}.$$

On peut tirer de là encore une nouvelle équation, à savoir

$$(\Delta K_1 - \Delta m_1)\frac{dw}{dp} = 0.$$

Si l'on avait $\Delta m_1 = 0$, cette équation serait une identité, et l'on aurait les deux intégrales nécessaires. Nous avons trouvé antérieurement

$$m_1 = c, \quad u + m_1 v = c'.$$

Nous avons ainsi retrouvé tous les cas d'intégrabilité précédents, et nous voyons qu'il y en a encore un, notamment lorsque

$$\Delta K_1 - \Delta m_1 = 0, \qquad (48)$$

sans que Δm_1 disparaisse.

Ce dernier cas d'intégrabilité se subdivise encore en deux autres, qui doivent être traités différemment. En premier lieu, nous avons à considérer le cas où $K_1 - m_1$ est une constante, en second lieu celui où il n'en est pas ainsi. Le premier cas, qui est le moins général, sera traité en premier lieu et nous supposerons que dans l'autre système auxiliaire, l'expression correspondante $K_2 - m_2$ soit constante également.

Commençons pas chercher quelles sont les conditions auxquelles l'équation (1) doit satisfaire pour que ce cas se présente. Nous représenterons par M_1 et M_2 les valeurs constantes de $m_1 - K_1$ et $m_2 - K_2$ et nous aurons

$$\frac{L\Delta m_1}{1 - \Delta L} - m_1 = \frac{\Delta (Lm_1) - m_1}{1 - \Delta L} = -M_1,$$

ou

$$\Delta (Lm_1) - m_1 = - M_1 (1 - \Delta L),$$

ou encore

$$\frac{d (m_1 L)}{dr} m_1^2 + \frac{d(m_1 L)}{dt} - m_1 = M_1 \left(\frac{dL}{dr} m_1^2 + \frac{dL}{dt} - 1\right);$$

et de même

$$\frac{d (m_2 L)}{dr} m_2^2 + \frac{d (m_2 L)}{dt} - m_2 = M_2 \left(\frac{dL}{dr} m_2^2 + \frac{dL}{dt} - 1\right).$$

L ne change pas quand on y échange m_1 et m_2; en exprimant m_1 et m_2 en fonction de R et T, il vient

$$L = \frac{R(1-4RT)}{R_2\frac{dT}{dt} + (1-2RT)\frac{dR}{dt} + T^2\frac{dR}{dr}} \quad \ldots \ldots (49)$$

Si l'on pose $M_1 + M_2 = 2\alpha$, $M_1 - M_2 = 2\beta$, on a par addition

$$(m_1^3+m_2^3)\frac{dL}{dr} + {}^1/_3 L\frac{d(m_1^3+m_2^3)}{dr} + \frac{d}{dt}\{(m_1+m_2)L\} - (m_1+m_2) =$$

$$= \alpha\left\{(m_1^2+m_2^2)\frac{dL}{dr} + 2\frac{dL}{dt} - 2\right\} \div \beta\frac{dL}{dr}(m_1^2 - m_2^2);$$

puis encore par addition après avoir divisé la première équation par m_1^2 et la seconde par m_2^2

$$\frac{d\{(m_1+m_2)L\}}{dr} + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{dL}{dt} - L\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) =$$

$$= \alpha\left\{2\frac{dL}{dr} + \left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{dL}{dt}-1\right)\right\} + \beta\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{dL}{dt}-1\right).$$

Introduisons maintenant à la place de m_1 et m_2 leurs valeurs en fonction de R et T, et posons

$$U = \frac{L}{R} = \frac{1-4RT}{R^2\frac{dT}{dt} + (1-2RT)\frac{dR}{dt} + T^2\frac{dR}{dr}}; \quad \ldots (50)$$

ces équations peuvent alors s'écrire:

$$\frac{dU}{dr}\{3RT - 1 - \alpha R(1-2RT) + \beta R\sqrt{(1-4RT)}\} -$$

$$- \frac{dU}{dt}(1+2\alpha R)R^2 + U\left\{T\frac{dR}{dr} + R\frac{dR}{dt} - \alpha\left((1-2RT)\frac{dR}{dt} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2R^2\frac{dR}{dt}\right) + \beta\frac{dR}{dr}\sqrt{(1-4RT)}\right\} + R + 2\alpha R^2 = 0,$$

et

$$\frac{dU}{dr}(1+2\alpha R)T^2+\frac{dU}{dt}\{RT+\alpha R(1-2RT)+\beta R\sqrt{(1-4RT)}\}+$$
$$+U\left\{T\frac{dR}{dt}+R\frac{dT}{dt}+\alpha\left(2T^2\frac{dR}{dr}+(1-2RT)\frac{dR}{dt}\right)\right\}+$$
$$+\beta\frac{dR}{dt}\sqrt{(1-4RT)}-\alpha(1-2RT)+\beta\sqrt{(1-4RT)}-T=0.$$

Les indices 1 et 2 ont été pris de façon à avoir

$$m_1=\frac{-1+\sqrt{(1-4RT)}}{2R},\quad m_2=\frac{-1-\sqrt{(1-4RT)}}{2R}.$$

En éliminant $\frac{dU}{dr}$ de ces deux équations, et en faisant disparaître $\frac{dR}{dr}$ à l'aide de (50), on arrive à une équation qui, après division par $R(1-4RT)$, se transforme en

$$\frac{dU}{dt}\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}+$$
$$+U\left\{\frac{dT}{dt}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{dR}{dt}-2\beta\frac{R\frac{dT}{dt}+T\frac{dR}{dt}}{\sqrt{(1-4RT)}}\right\}=2\alpha T+(\alpha^2-\beta^2).$$

De même l'élimination de $\frac{dU}{dt}$ et de $\frac{dT}{dt}$ donnent

$$\frac{dU}{dr}\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}+$$
$$+U\left\{\frac{dR}{dt}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{dR}{dr}-2\beta\frac{R\frac{dR}{dt}+T\frac{dR}{dr}}{\sqrt{(1-4RT)}}\right\}=2\alpha R+1.$$

Ce deux équations peuvent être déduites par différentiation de

$$U\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}=r+2\alpha f+(\alpha^2-\beta^2)t+C.$$

Cette équation représente donc la seule condition à laquelle l'équation différentielle (1) doit satisfaire pour que le cas traité ici se présente. Si l'on exprime α et β en fonction de M_1 et M_2, elle peut s'écrire

$$T_1 \frac{dR}{dr} + (1 - 2\,RT)\frac{dR}{dt} + R_2 \frac{dT}{dt} =$$
$$= \frac{(1 - 4\,RT)\,R\,(m_1 - M_1)(m_2 - M_2)}{r + (M_1 + M_2)\,f + M_1 M_2\, t + C} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

Cette équation, considérée comme une équation différentielle en f comme variable dépendante et en r et t comme variables indépendantes, nous allons tâcher de l'intégrer. Nous laisserons de côté la constante arbitraire C, parce qu'il est possible de passer de ce cas particulier au cas général par une légère modification. Nous remplacerons encore une fois r, f ou s, et t temporairement par x, z et y, et nous emploierons les notations ordinaires pour les différentielles de *ce* z par rapport à *cet* x et *cet* y. L'équation (51) devient ainsi

$$q^2 r + (1 - 2pq)s + p^2 t = \frac{(1-4pq)p(m_1 - M_1)(m_2 - M_2)}{x + (M_1 + M_2)z + M_1 M_2\, y} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

Dans la suite nous représenterons par G le dénominateur du 2d membre. m_1 et m_2 sont maintenant les racines de

$$p\,m^2 + m + q = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

Le cas limite $M_1 = M_2 = \infty$, qui n'est compris que comme cas limite dans le cas général, sera traité séparément et en premier lieu.

Nous considérons donc tout d'abord l'équation

$$q^2\, r + (1 - 2\,p\,q)\,s + p^2\, t = \frac{(1 - 4\,p\,q)\,p}{y}, \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

et nous commencerons par la simplifier en prenant z et y comme variables indépendantes.

Si l'on pose

$$\frac{dx}{dz} = P, \quad \frac{dx}{dy} = Q, \quad \frac{d^2x}{dz^2} = R, \quad \frac{d^2x}{dz\,dy} = S, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = T,$$

alors

$$p = \frac{1}{P}, \; q = -\frac{Q}{P}, \; r = -\frac{R}{P^3}, \quad s = \frac{QR - PS}{P^3},$$
$$t = -\frac{Q^2 R - 2\,P\,Q\,S + P^2\, T}{P^3};$$

et en effectuant ces substitutions, nous mettons l'équation (54) sous la forme

$$Q R - P S - T = \frac{P^2 + 4 Q}{y},$$

et de même (53) devient

$$m^2 + P m - Q = 0.$$

Ici nous allons à nouveau représenter par z la variable dépendante et par x et y les variables indépendantes. Les équations deviennent ainsi

$$q r - p s - t = \frac{p^2 + 4 q}{y}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

et

$$m^2 + p m - q = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

A l'équation (55) nous appliquons encore la méthode que nous avons toujours employée et nous avons ainsi à intégrer le système (2), où nous supposons que t soit éliminé à l'aide de (55), de sorte que $\frac{dw}{dt}$ peut être posé égal à 0.

Le système devient ainsi

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dw}{dx} + \mu_2 \frac{dw}{dy} + (p + \mu_2 q)\frac{dw}{dz} + (r + \mu_2 s)\frac{dw}{dp} + \\ &+\left(-\frac{r + \mu_2 s}{\mu_1} + \frac{p^2 + 4q}{q\mu_1 y}\right)\frac{dw}{dq} + \left(\frac{2pr + 4s}{qy}\right)\frac{dw}{dr} = 0, \\ &\frac{dw}{dr}\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (57)$$

μ_1 et μ_2 étant les racines de l'équation caractéristique

$$q \mu^2 + p \mu - 1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (58)$$

La comparaison des équations (58) et (56) nous apprend que

$$\mu_1 = -\frac{1}{m_1} \text{ et } \mu_2 = -\frac{1}{m_2}.$$

Exprimons dans la première équation (57) p et q en fonction de μ_1 et μ_2 à l'aide des relations

$$q = -\frac{1}{\mu_1 \mu_2}, \quad p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \quad \ldots \quad \ldots (59)$$

Dans cette opération on a besoin des relations suivantes qu'il est facile de tirer de (59):

$$\left.\begin{aligned} & p^2 + 4q = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1^2 \mu_2^2}, \quad \frac{d\mu_1}{dp} \frac{p^2 + 4q}{q} = -\mu_1 (\mu_1 - \mu_2), \\ & \frac{d\mu_1}{dp} = \frac{\mu_1^2 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \frac{d\mu_2}{dp} = -\frac{\mu_2^2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, \\ & r + 2\mu_2 s + \mu_2^2 t = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \left((r + \mu_2 s) - \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1^2 y} \right), \end{aligned}\right\} \ldots (60)$$

$$r + (\mu_1 + \mu_2) s + \mu_1 \mu_2 t = -\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 \mu_2 y}.$$

A l'aide de ces relations on peut transformer le système (57) en

$$\frac{dw}{dx} + \mu_2 \frac{dw}{dy} + \frac{1}{\mu_2} \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1(\mu_1 - \mu_2)}{y} \frac{dw}{d\mu_1} - \left\{ \mu_2^2 (r + \mu_2 s) - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2^2}{\mu_1 y} \right\} \frac{dw}{d\mu_2}$$

$$- \frac{2\mu_1 (r + \mu_2 s) + 2\mu_2 (r + \mu_1 s)}{y} \frac{dw}{dr} = 0, \quad \ldots (61)$$

$$\frac{dw}{dr} \mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (62)$$

Par la règle de J a c o b i on en déduit la nouvelle équation

$$\frac{dw}{d\mu_2} \mu_2^2 (\mu_1 - \mu_2) + \frac{dw}{dr} \frac{\mu_1 (\mu_1 - \mu_2)}{y} = 0,$$

ou bien, en divisant par $\mu_2^2 (\mu_1 - \mu_2)$,

$$\frac{dw}{d\mu_2} + \frac{dw}{dr} \frac{\mu_1}{\mu_2^2 y} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots (63)$$

Au moyen de (63) on peut réduire (61) à

$$\frac{dw}{dx} + \mu_2 \frac{dw}{dy} + \frac{1}{\mu_2} \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 (\mu_1 - \mu_2)}{y} \frac{dw}{d\mu_1} -$$

$$- \left\{ \frac{\mu_1 (r + \mu_2 s) + 2\mu_2 (r + \mu_1 s)}{y} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{y^2} \right\} \frac{dw}{dr} = 0 \quad \ldots (64)$$

Nous avons maintenant le système formé des équations (62), (63) et (64). La 1ère ne donne pas de nouvelles équations avec les deux autres, mais (63) et (64) ensemble donnent

$$\frac{dw}{dy} - \frac{1}{\mu_2^2}\frac{dw}{dz} + \frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1} - \left(\frac{\mu_1 s}{y} + \frac{2(r+\mu_1 s)}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr} = 0. \quad (65)$$

A l'aide de cette équation nous pouvons remplacer (64) par

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2}{\mu_2}\frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1} + \left(\frac{\mu_1}{y^2} - \frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr} = 0. \quad \ldots\ldots (66)$$

Cette dernière donne enfin par combinaison avec (63) $\frac{dw}{dz} = 0$.

Nous sommes ainsi arrivés au système

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dw}{dx} - \frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1} + \left(\frac{\mu_1}{y^2} - \frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr} = 0, \\
&\frac{dw}{dy} + \frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1} - \left(\frac{\mu_1 s}{y} + \frac{2(r+\mu_1 s)}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr} = 0, \\
&\frac{dw}{d\mu_2} + \frac{dw}{dr}\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y} = 0, \quad \frac{dw}{dr}\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

La dernière équation montre qu'aucune des intégrales ne peut contenir z. Des quatre autres nous allons faire la somme après les avois multipliées toutes, sauf une, par un facteur indéterminé. Nous formons ainsi une équation linéaire, dont le système auxiliaire est

$$dx = \frac{dy}{\gamma} = \frac{d\mu_1}{-\frac{\mu_1^2}{y} + \gamma\frac{\mu_1}{y}} = \frac{d\mu_2}{\delta} =$$

$$= \frac{dr}{\frac{\mu_1}{y^2} - \frac{\mu_1 r}{y} - \gamma\left(\frac{\mu_1 s}{y} + \frac{2(r+\mu_1 s)}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right) + \delta\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y} + \varepsilon\mu_1} = \frac{ds}{-\varepsilon}.$$

L'élimination des quantités indéterminées γ, δ et ε donne les deux équations

$$\mu_1^2\, dx = \mu_1\, dy - y\, d\mu_1,$$

$$y^2(r+\mu_1 s)\, d\mu_1 - 3y(r+\mu_1 s)\mu_1\, dy - \mu_1 y^2\, d(r+\mu_1 s) +$$

$$+ 2\mu_1\, dy - y\, d\mu_1 - \frac{2\mu_1^2\, dy}{\mu_2} + \frac{y\mu_1^2\, d\mu_2}{\mu_2^2} = 0.$$

La première a pour intégrale

$$\frac{\mu_1 x - y}{\mu_1} = c,$$

la dernière

$$\frac{y^3 (r + \mu_1 s)}{\mu_1} - y^2 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = c'.$$

Remplaçons μ_1 par $-\frac{1}{m_1}$ et μ_2 par $-\frac{1}{m_2}$; une première intégrale de (55) sera

$$y^3 (s - m_1 r) + y^2 (m_1 - m_2) = \varphi (x + m_1 y).$$

En voici évidemment une autre:

$$y^3 (s - m_2 r) - y^2 (m_1 - m_2) = \psi (x + m_2 y).$$

De ces deux équations et de (55) il résulte que

$$r = \frac{2}{y} - \frac{\varphi - \psi}{y^3 (m_1 - m_2)},$$

$$s = \frac{m_1 + m_2}{y} - \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)},$$

$$t = \frac{2 m_1 m_2}{y} - \frac{m_2^2 \varphi - m_1^2 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}.$$

On tire de là

$$dp = -d(m_1 + m_2) = \frac{2\,dx + (m_1 + m_2)\,dy}{y} -$$

$$- \frac{\varphi - \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dx - \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dy,$$

$$dq = -d(m_1 m_2) = \frac{(m_1 + m_2)\,dx + 2 m_1 m_2\,dy}{y} -$$

$$- \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dx - \frac{m_2^2 \varphi - m_1^2 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}\,dy.$$

Posons enfin

$$x + m_1 y = \alpha, \qquad x + m_2 y = \beta,$$

de sorte que

$$m_1 = \frac{\alpha - x}{y}, \qquad m_2 = \frac{\beta - x}{y}, \qquad m_1 - m_2 = \frac{\alpha - \beta}{y}.$$

Nos équations se transforment en

$$d\alpha + d\beta = \frac{(\varphi - \psi)(ydx - xdy)}{y^2(\alpha - \beta)} + \frac{\beta\varphi - \alpha\psi}{y^2(\alpha - \beta)} dy\,, \quad \ldots \ldots \quad (68)$$

$$d(\alpha\beta) - x\,d(\alpha + \beta) = - \frac{(\varphi - \psi)(xy\,dx - x^2\,dy)}{y^2(\alpha - \beta)} +$$

$$+ \frac{(\beta\varphi - \alpha\psi)(ydx - 2\,xdy)}{y^2(\alpha - \beta)} + \frac{(\beta^2\varphi - \alpha^2\psi)}{y^2(\alpha - \beta)} dy\,.$$

La seconde peut être simplifiée à l'aide de la première:

$$d(\alpha\beta) = \frac{\beta\varphi - \alpha\psi}{y^2(\alpha - \beta)}(ydx - xdy) + \frac{\beta^2\varphi - \alpha^2\psi}{y^2(\alpha - \beta)} dy \quad \ldots \quad (69)$$

Tirons de (68) et (69) les valeurs de dy et $ydx - xdy$; il vient

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{d\alpha}{\varphi} - \frac{d\beta}{\psi}\,, \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{\alpha d\alpha}{\varphi} + \frac{\beta d\beta}{\psi}\,.$$

Enfin

$$dz = p\,dx + q\,dy = -(m_1 + m_2)\,dx - m_1\,m_2\,dy =$$

$$= \frac{2\,x - \alpha - \beta}{y}\,dx - \frac{x^2 - x(\alpha + \beta) + \alpha\beta}{y^2}\,dy =$$

$$\frac{2\,xy\,dx - x^2\,dy}{y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}(\alpha + \beta) - \frac{dy}{y^2}\,\alpha\beta\,;$$

donc

$$d\left(z - \frac{x^2}{y}\right) = -\frac{\alpha^2\,d\alpha}{\varphi} - \frac{\beta^2\,d\beta}{\psi}\,.$$

Remplaçons encore φ par $\frac{1}{\chi'''(\alpha)}$ et ψ par $\frac{1}{\omega'''(\beta)}$; alors on a, après avoir effectué les quadratures,

$$\frac{1}{y} = \chi'' + \omega'', \qquad \frac{x}{y} = \alpha\chi'' - \chi' + \beta\,\omega'' - \omega',$$

$$\frac{x^2 - yz}{y} = \alpha^2\,\chi'' - 2\,\alpha\,\chi' + 2\,\chi + \beta^2\,\omega'' - 2\,\beta\,\omega' + 2\,\omega.$$

Nous voyons ainsi que l'équation (54) pourrait être rameneé à (24) par une substitution relativement simple.

Si l'on considère maintenant que x, y et z ont été mis à la place de $s=f$, t et r, on voit que dans ce cas l'équation (1) doit être le résultat de l'élimination de α et β entre les trois équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{t}=\chi''(\alpha)+\omega''(\beta), \qquad \frac{s}{t}=\alpha\chi''-\chi'+\beta\omega''-\omega',\\ &\frac{s^2-rt}{t}=\alpha^2\chi''-2\alpha\chi'+2\chi+\beta^2\omega''-2\beta\omega'+2\omega\end{aligned}\right\} \quad \ldots (70)$$

Le cas général, où M_1 et M_2 ont une valeur constante arbitraire, peut être traité de la même manière. En prenant z et y pour variables indépendantes, et représentant de nouveau par x et y les variables indépendantes et par z la variable dépendante, on transforme l'équation (52) en

$$qr-ps-t=\frac{(p^2+4q)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{z+(M_1+M_2)x+M_1M_2y}=$$
$$=\frac{(p^2+4q)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} \quad \ldots\ldots\ldots (71)$$

Si l'on exprime p et q en fonction de μ_1 et μ_2, et que l'on suppose que partout t soit éliminé à l'aide de (71), le premier système auxiliaire de cette équation devient

$$\frac{dw}{dx}+\mu_2\frac{dw}{dy}+\frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2 G}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)\frac{dw}{d\mu_1}-$$
$$-\left\{\mu_2^2(r+\mu_2 s)-\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2}{\mu_1^2}\frac{(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)}{G}\right\}\frac{dw}{d\mu_2}-$$
$$-\left\{\frac{2\mu_1(r+\mu_2 s)+2\mu_2(r+\mu_1 s)}{\mu_1\mu_2 G}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)-\right.$$
$$-\frac{\mu_1-\mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1+M_2\mu_2)(r+\mu_1 s)+\frac{\mu_1-\mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1+M_1\mu_1)(r+\mu_2 s)-$$
$$-\frac{(M_1+M_2)\mu_1\mu_2+\mu_1+\mu_2}{G^2\mu_1^3\mu_2^3}(\mu_1-\mu_2)^2(1+M_1\mu_1)\times$$
$$\left.\begin{aligned}&\times(1+M_2\mu_2)\left.\vphantom{\frac{1}{1}}\right\}\frac{dw}{dr}=0,\\ &\qquad\qquad \frac{dw}{dr}\mu_1-\frac{dw}{ds}=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (72)$$

L'application du théorème de Jacobi conduit ici à des calculs assez longs, que nous éviterons de la manière suivante.

Nous considérons d'abord le cas particulier $M_1 = M_2 = 0$. Nous savons d'avance que nous devons arriver à un résultat, car ce cas se déduit du précédent par la permutation de y et z. Nous savons aussi que les intégrales, que nous devrons trouver certainement, ne contiendront pas d'y, de sorte que dès l'abord nous pouvons poser $\frac{dw}{dy} = 0$. Les équations (72) deviennent donc

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_2 \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{z} \frac{dw}{d\mu_1} - \\
&- \left\{ \mu_2^3 (r + \mu_2 s) - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2^2}{\mu_1^2 z} \right\} \frac{dw}{d\mu_2} - \\
&- \left\{ \frac{(3\mu_1 - \mu_2)(r + \mu_2 s) + (3\mu_2 - \mu_1)(r + \mu_1 s)}{z\mu_1} - \right. \\
&\left. - \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1^3 \mu_2^2 z^2} \right\} \frac{dw}{dr}, \\
&\qquad \frac{dw}{dr}\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (73)$$

De ceci on tire après simplification la nouvelle équation

$$\frac{dw}{d\mu_2} + \frac{2\mu_1 - \mu_2}{\mu_2^3 \mu_1 z} \frac{dw}{dr} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (74)$$

qui nous permet de réduire (73) à

$$\mu_2 \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{z} \frac{dw}{d\mu_1} - \left\{ \frac{\mu_1(r + \mu_2 s) + (3\mu_2 - \mu_1)(r + \mu_1 s)}{\mu_1 z} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\mu_1 - 2\mu_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^2 z^2} \right\} \frac{dw}{dr} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

L'opération de Jacobi permet de tirer de (74) et (75) l'équation suivante:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{1}{z} \frac{dw}{d\mu_1} - \left\{ \frac{3r + 4\mu_1 s}{\mu_1 z} + \frac{3\mu_1 - 2\mu_2}{\mu_1^2 \mu_2^2 z^2} \right\} \frac{dw}{dr} = 0, \quad . \, (76)$$

à l'aide de laquelle (75) peut être réduite à

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1}{z}\frac{dw}{d\mu_1} + \left(\frac{\mu_1 s}{z} + \frac{1}{\mu_2{}^2 z^2}\right)\frac{dw}{dr} = 0 \quad . \; . \; . \; (77)$$

Il est inutile de chercher d'autres équations. Nous savons d'avance que nous n'en trouverions pas.

Traitons le système formé par la seconde équation (73), et de (74), (76) et (77), de la même manière que nous avons traité le système (67), nous trouvons alors les deux intégrales communes

$$x - \mu_1 z = c \quad \text{et} \quad \mu_1{}^3 z^3 (r + \mu_1 s) + \mu_1{}^2 z^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2{}^2} = c'.$$

Dans le cas général on trouve sans trop de peine que (72) a pour intégrale

$$\frac{x(1 - \mu_1 M_2) + y M_2 - z\mu_1}{1 + M_1 \mu_1} = c.$$

Si l'on compare maintenant les intégrales dans les deux cas traités isolément, il vient l'idée que dans le cas géneral il pourrait bien y avoir une intégrale de la forme

$$G^3 (r + \mu_1 s) u + G^2 v = \text{constante},$$

où u et v sont fonctions de μ_1 et μ_2 seuls. La seconde équation (72) est évidemment vérifiée par cette intégrale. Si dans la première équation (72) on introduit pour w l'expression que nous avons posée ici égale à une constante, et si l'on ordonne le premier membre suivant les puissances de G, on voit que le coëfficient de G^3 est $\mu_2{}^2 (r + \mu_2 s)(r + \mu_1 s)\dfrac{du}{d\mu_2}$. Pour que ce coëfficient soit nul, il faut que u ne contienne pas μ_2. Le coëfficient de G^2 devient alors

$$(r+\mu_1 s)(1+M_2\mu_2)\frac{(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1 \mu_2}\left\{(3-M_1\mu_1)u-(1+M_1\mu_1)\mu_1\frac{du}{d\mu_1}\right\}-$$

$$-(r + \mu_2 s)\left\{\mu_2{}^2 \frac{dv}{d\mu_2} + \frac{2\mu_1 - \mu_2 + M_2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2} u (1 + M_1 \mu_1\right\}.$$

Pour que celui-ci s'annule indépendamment de r et s il faut d'abord

$$(1 + M_1 \mu_1) \mu_1 \frac{d u}{d \mu_1} = u (3 - M_1 \mu_1);$$

d'où l'on tire, en négligeant un facteur constant,

$$u = \frac{\mu_1^3}{(1 + M_1 \mu_1)^4},$$

et ensuite

$$\frac{d v}{d \mu_2} = - \frac{(2 \mu_1 - \mu_2 + M_2 \mu_1 \mu_2) \mu_1^2}{\mu_2^3 (1 + M_1 \mu_1)^3};$$

donc

$$v = \frac{\mu_1^2 (\mu_1 - \mu_2 + M_2 \mu_1 \mu_2)}{(1 + M_1 \mu_1)^3 \mu_2^2} + F(\mu_1).$$

Enfin le coëfficient de G est

$$2v \frac{(1+M_1 \mu_2)(1+M_2 \mu_2)}{\mu_2} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} (1+M_1 \mu_1)(1+M_2 \mu_2) \frac{d v}{d \mu_1} +$$

$$+ \frac{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2}{\mu_1^2} (1 + M_1 \mu_1)(1 + M_2 \mu_2) \frac{d v}{d \mu_2} +$$

$$+ u \frac{(M_1 + M_2) \mu_1 \mu_2 + \mu_1 + \mu_2}{\mu_1^3 \mu_2^3} (\mu_1 - \mu_2)^2 (1+M_1 \mu_1)(1+M_2 \mu_2).$$

On voit de suite que v sera divisible par $\mu_1 - \mu_2$, de sorte que $F(\mu_1) = - \frac{M_2 \mu_1^2}{(1 + M_1 \mu_1)^3}$; v prend donc la valeur

$$v = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} (\mu_1 - \mu_2) \frac{(1 + M_2 \mu_2)}{(1 + M_1 \mu_1)^3};$$

et cette valeur satisfait en effet, de sorte que

$$\frac{G^3 (r + \mu_1 s) \mu_1^3}{(1 + M_1 \mu_1)^4} + \frac{G^2 \mu_1^2 (\mu_1 - \mu_2)(1 + M_2 \mu_2)}{\mu_2^2 (1 + M_1 \mu_1)^3} = c'$$

est une intégrale de (72).

Remplaçons μ_1 par $-\dfrac{1}{m_1}$ et μ_2 par $-\dfrac{1}{m_2}$ et posons

$$\frac{x(m_1+M_2)+y\,m_1\,M_2+z}{m_1-M_1}=\alpha;$$

nous avons alors pour première intégrale de (71)

$$s-m_1\,r=-\frac{(m_1-m_2)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G}+\frac{(m_1-M_1)^4\varphi(\alpha)}{G^3},$$

à laquelle nous pouvons ajouter immédiatement

$$s-m_2\,r=\frac{(m_1-m_2)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G}+\frac{(m_2-M_2)^4\psi(\beta)}{G^3},$$

où l'on a posé

$$\frac{x(m_2+M_1)+y\,m_2\,M_1+z}{m_2-M_2}=\beta.$$

De ces deux équations et de (71) il résulte

$$\left.\begin{aligned}
r&=\frac{2(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G}-\frac{(m_1-M_1)^4\varphi-(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)},\\
s&=\frac{(m_1+m_2)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G}-\frac{m_2(m_1-M_1)^4\varphi-m_1(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)},\\
t&=\frac{2m_1m_2(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G}-\frac{m_2^2(m_1-M_1)^4\varphi-m_1^2(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)}.
\end{aligned}\right\}\quad(78)$$

Des définitions de α et β on tire

$$m_1=-\frac{z+M_2\,x+M_1\,\alpha}{x+M_2\,y-\alpha},\quad m_2=-\frac{z+M_1\,x+M_2\,\beta}{x+M_1\,y-\beta},\ .\ (79)$$

$$m_1-M_1=-\frac{G}{x+M_2\,y-\alpha},\quad m_2-M_2=-\frac{G}{x+M_1\,y-\beta}\ (80)$$

Posons

$$\left.\begin{aligned}
&z+M_2\,x+M_1\,\alpha=V_1,\quad z+M_1\,x+M_2\,\beta=V_2,\\
&x+M_2\,y-\alpha=U_1,\qquad x+M_1\,y-\beta=V_2;
\end{aligned}\right\}\ (81)$$

alors

$$V_1+M_1\,U_1=V_2+M_2\,U_2=G;\ .\ .\ .\ .\ .\ (82)$$

tandis que nous posons encore

$$H_1=V_1+M_2\,U_1,\quad H_2=V_2+M_1\,U_2\ .\ .\ .\ (83)$$

Par différentiation nous tirons de (79)

$$dm_1 = -\frac{dz + M_2\, dx + M_1\, d\alpha}{U_1} - \frac{dx + M_2\, dy - d\alpha}{U_1}\, m_1;$$

ou bien, en remplaçant dz par sa valeur

$$pdx + qdy = -(m_1 + m_2)\, dx - m_1\, m_2\, dy,$$

$$d\, m_1 = \frac{(m_2 - M_2)\, dx + m_1\,(m_2 - M_2)\, dy + (m_1 - M_1)\, d\alpha}{U_1} =$$

$$= -\frac{G}{U_1\, U_2}\,(dx + m_1\, dy) - G\,\frac{d\,\alpha}{U_1^{\,2}},$$

et de même

$$dm_2 = -\frac{G}{U_1\, U_2}\,(dx + m_2\, dy) - G\,\frac{d\,\beta}{U_2^{\,2}}.$$

A l'aide de ces équations nous tirons des deux premières équations (78)

$$\frac{d\,\alpha}{U_1^{\,2}} + \frac{d\,\beta}{U_2^{\,2}} = \frac{(U_1^{\,4}\,\psi - U_2^{\,4}\varphi)\, dx + (m_1\; U_1^{\,4}\,\psi - m_2\; U_2^{\,4}\varphi)\, dy}{(m_1 - m_2)\; U_1^{\,4}\; U_2^{\,4}};$$

et des deux dernières

$$m_2\,\frac{d\,\alpha}{U_1^{\,2}} + m_1\,\frac{d\,\beta}{U_2^{\,2}} = \frac{(m_1\, U_1^{\,4}\,\psi - m_1\, U_2^{\,4}\,\varphi)\, dx + (m_1^{\,2}\, U_1^{\,4}\,\psi - m_2^{\,2}\, U_2^{\,4}\,\varphi)\, dy}{(m_1 - m_2)\; U_1^{\,4}\; U_2^{\,4}}.$$

La résolution par rapport à dy et dx donne

$$\left.\begin{aligned} d\,y &= \frac{d\,\alpha}{\varphi}\; U_1^{\,2} + \frac{d\,\beta}{\psi}\; U_2^{\,2}, \\ d\,x &= -m_1\,\frac{d\alpha}{\varphi}\; U_1^{\,2} - m_2\,\frac{d\beta}{\psi}\; U_2^{\,2} = \frac{d\alpha}{\varphi}\; U_1\, V_1 + \frac{d\beta}{\psi}\; U_2\; V_2; \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (84)$$

et à l'aide de

$$dz = -(m_1 + m_2)\, dx - m_1\, m_2\, dy$$

on en tire enfin

$$dz = m_1^{\,2}\,\frac{d\,\alpha}{\varphi}\; U_1^{\,2} + m_2^{\,2}\,\frac{d\,\beta}{\psi}\; U_2^{\,2} = \frac{d\,\alpha}{\varphi}\; V_1^{\,2} + \frac{d\,\beta}{\psi}\; V_2^{\,2} \quad . \ . \ (85)$$

La suite de l'intégration sera différente suivant que M_1 et M_2 sont égaux ou différents l'un de l'autre.

Si $M_1 = M_2 = M$, nous poserons pour abréger $x + My = \delta$, $z + Mx = \gamma$, nous remplacerons φ par $\frac{1}{\chi'''(\alpha)}$ et ψ par $\frac{1}{\omega'''(\beta)}$, et nous mettrons le système sous la forme

$$dy = \delta^2(\chi'''d\alpha + \omega'''d\beta) - 2\delta(\alpha\chi'''d\alpha + \beta\omega'''d\beta) + (\alpha^2\chi'''d\alpha + \beta^2\omega'''d\beta),$$
$$dx = \gamma\delta(\chi'''d\alpha + \omega'''d\beta) - (\gamma - M\delta)(\alpha\chi'''d\alpha + \beta\omega'''d\beta) - M(\alpha^2\chi'''d\alpha + \beta^2\omega'''d\beta),$$
$$dz = \gamma^2(\chi'''d\alpha + \omega'''d\beta) + 2M\gamma(\alpha\chi'''d\alpha + \beta\omega'''d\beta) + M^2(\alpha^2\chi'''d\alpha + \beta^2\omega'''d\beta).$$

D'ici nous tirons les trois expressions qui dépendent de α et β :

$$\chi'''(\alpha)\, d\alpha + \omega'''(\beta)\, d\beta = \frac{dz + 2Mdx + M^2 dy}{G^2} = \frac{dG}{G^2} = -d\left(\frac{1}{G}\right),$$

$$\alpha\chi'''d\alpha + \beta\omega'''d\beta = \frac{\delta\, dz - (\gamma - M\delta)\, dx - M\gamma\, dy}{G^2} = -d\,\frac{x + My}{G},$$

$$\alpha^2\chi'''\, d\alpha + \beta^2\omega'''\, d\beta = \frac{\delta^2\, dz - 2\gamma\delta\, dx + \gamma^2\, dy}{G^2} =$$

$$= d\left(y - \frac{(x + My)^2}{G}\right) = d\left(\frac{yz - x^2}{G}\right),$$

d'où il suit

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{G} &= \chi'' + \omega'', \quad -\frac{x + My}{G} = \alpha\chi'' - \chi' + \beta\omega'' - \beta', \\ \frac{yz - x^2}{G} &= \alpha^2\chi'' - 2\alpha\chi' + 2\chi + \beta^2\omega'' - 2\beta\omega' + 2\omega. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (86)$$

Si $M_1 \lessgtr M_2$ nous tirons de (84) et (85), en remplaçant φ par $\frac{1}{\varphi'}$, et ψ par $\frac{1}{\psi'}$:

$$\frac{dy}{d\alpha} = U_1^2\,\varphi', \qquad \frac{dy}{d\beta} = U_2^2\,\psi', \qquad \frac{dx}{d\alpha} = U_1 V_1\,\varphi';$$

$$\frac{dx}{d\beta} = U_2 V_2\,\psi', \quad \frac{dz}{d\alpha} = V_1^2\,\varphi', \qquad \frac{dz}{d\beta} = V_2^2\,\psi'.$$

et comme

$$\frac{dU_1}{d\alpha} = \frac{dx}{d\alpha} + M_2\,\frac{dy}{d\alpha} - 1,$$

on tire de là, d'après (82) et (83)

$$\frac{d\,U_1}{d\,\alpha} = U_1\,(V_1 + M_2\,U_1)\,\varphi' - 1 = U_1\,H_1\,\varphi' - 1\,;$$

et de même

$$\frac{d\,V_1}{d\,\alpha} = V_1\,(V_1 + M_2\,U_1)\,\varphi' + M_1 = V_1\,H_1\,\varphi' + M_1.$$

Il suit encore de là que

$$M_2\,\frac{d\,U_1}{d\,\alpha} + \frac{d\,V_1}{d\,\alpha} = \frac{d\,H_1}{d\,\alpha} = H_1^2\,\varphi' + M_1 - M_2. \quad . \quad (87)$$

De la même manière on trouve

$$\frac{d\,U_1}{d\beta} = U_2\,G\,\psi', \qquad \frac{d\,V_1}{d\beta} = V_2\,G\,\psi'\,;$$

donc

$$M_2\,\frac{dU_1}{d\beta} + \frac{dV_1}{d\beta} = \frac{d\,H_1}{d\beta} = G^2\,\psi'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Nous tâcherons de satisfaire à l'équation (87) en mettant à la place de H_1 une fonction h_1 de α seul, et nous poserons pour cela

$$h_1 = -\frac{1}{\varphi + (M_1 - M_2)\,\tau(\alpha)}\,;$$

alors

$$\frac{d\,h_1}{d\,\alpha} = \frac{\varphi' + (M_1 - M_2)\,\tau'}{\{\varphi + (M_1 - M_2)\,\tau\}^2} = \varphi'\,h_1^2 + \frac{(M_1 - M_2)\,\tau'}{\{\varphi + (M_1 - M_2)\tau\}^2}.$$

Pour que l'équation soit vérifiée il faut $\tau' = \{\varphi + (M_1 - M_2)\tau\}^2$; donc

$$\varphi = -(M_1 - M_2)\,\tau + \sqrt{\tau'};$$

et par conséquent

$$\varphi' = -(M_1 - M_2)\,\tau' + \frac{\tau''}{2\sqrt{\tau'}} \text{ et } h_1 = -\frac{1}{\sqrt{\tau'}}.$$

De cette manière nous avons exprimé φ' en fonction de τ; et à la place de cette dernière fonction nous en introduirons encore une autre par la relation

$$\sqrt{\tau'} = \frac{\chi''}{2\,(M_1 - M_2)\,\chi'}.$$

Ainsi on a

$$\tau' = \frac{\chi''^2}{4(M_1 - M_2)^2 \chi'^2},$$

$$\varphi' = -\frac{\chi''^2}{4(M_1 - M_2)\chi'^2} + \frac{\chi' \chi''' - \chi''^2}{2(M_1 - M_2)\chi'^2} = \frac{2\chi'\chi''' - 3\chi''^2}{4(M_1 - M_2)\chi'^2}, \quad \ldots (89)$$

et

$$h_1 \varphi' = \frac{3\chi''^2 - 2\chi'\chi'''}{2\chi'\chi''}.$$

Afin d'intégrer plus complètement (87), nous poserons

$$H_1 = h_1 + \frac{1}{\lambda};$$

alors

$$\frac{dh_1}{d\alpha} - \frac{\frac{d\lambda}{d\alpha}}{\lambda^2} = h_1^2 \varphi' + \frac{2 h_1 \varphi'}{\lambda} + \frac{\varphi'}{\lambda^2} + M_1 - M_2;$$

ou bien, en introduisant les valeurs de h_1 et φ',

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} + \lambda \frac{3\chi''^2 - 2\chi'\chi'''}{\chi'\chi''} + \frac{2\chi'\chi''' - 3\chi''^2}{4(M_1 - M_2)\chi'^2} = 0.$$

Cette équation linéaire a pour intégrale

$$\lambda = \frac{\chi''^2}{\chi'^3}\left(F_1(\beta) - \frac{\chi\chi'' - 2\chi'^2}{4(M_1 - M_2)\chi''}\right);$$

donc

$$H_1 = \frac{2\chi'(M_2 - M_1)}{\chi''} + \frac{(M_2 - M_1)\chi'^3}{\chi''^2 \left\{ -f_1(\beta) + \frac{\chi\chi'' - 2\chi'^2}{4\chi''} \right\}} \quad \ldots (90)$$

De la même manière on trouve

$$H_2 = \frac{2\omega'}{\omega''}(M_1 - M_2) + \frac{(M_1 - M_2)\omega'^3}{\omega''_2 \left\{ -f_2(\alpha) + \frac{\omega\omega'' - 2\omega'^2}{4\omega''} \right\}}; \quad \ldots (91)$$

en posant par analogie avec (89)

$$\psi' = -\frac{2\omega'\omega''' - 3\omega''^2}{4(M_1 - M_2)\omega'^2}.$$

De (88) et (90) on tire maintenant

$$G^2 = \frac{4\,(M_1 - M_2)^2\,\chi'^3\,\omega'^2 f_1'(\beta)}{\chi''^2\,(2\,\omega'\,\omega''' - 3\,\omega''^2)\left(-f_1(\beta) + \frac{\chi\,\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right)^2};$$

et de (91) on tire d'un façon analogue

$$G^2 = \frac{4\,(M_1 - M_2)^2\,\omega'^3\chi'^2 f_2'(\alpha)}{\omega''^2\,(2\,\chi'\,\chi''' - 3\,\chi''^2)\left(-f_2(\alpha) + \frac{\omega\,\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''}\right)^2}.$$

La comparaison de ces deux valeurs de G^2 nous apprend que

$$f_1(\beta) = \frac{\omega\,\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''}, \quad f_2(\alpha) = \frac{\chi\,\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''};$$

et en substituant on trouve

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{(M_1 - M_2)\,\chi'^{3/2}\,\omega'^{3/2}}{\omega''\,\chi''\left(\frac{\omega\,\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''} - \frac{\chi\,\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right)}, \\ H_1 &= (M_2 - M_1)\left\{\frac{2\,\chi'}{\chi''} - \frac{\chi'^3}{\chi''^2\left(\frac{\omega\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''} - \frac{\chi\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right)}\right\} \\ H_2 &= (M_1 - M_2)\left\{\frac{2\omega'}{\omega''} + \frac{\omega'^3}{\omega''^2\left(\frac{\omega\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''} - \frac{\chi\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right)}\right\} \end{aligned}\right\} . \quad (92)$$

Ces trois équations représentent l'intégrale cherchée. Pour que nous ayons affaire au cas considéré il faut donc que l'équation différentielle (1) soit le résultat de l'élimination de α et β entre

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r + 2\,M s + M^2\,t} &= -\chi'' - \omega'', \\ \frac{s + M t}{r + 2\,M s + M^2\,t} &= -\alpha\,\chi'' + \chi' - \beta\,\omega'' + \omega', \\ \frac{r\,t - s^2}{r + 2\,M s + M^2\,t} &= \alpha^2\,\chi'' - 2\alpha\chi' + 2\chi + \beta^2\,\omega'' - 2\beta\omega' + 2\omega; \end{aligned}\right\} . \quad (93)$$

ou bien entre

$$\left.\begin{aligned}
&r + (M_1 + M_2)\,s + M_1\,M_2\,t = \\
&\qquad = \frac{(M_1 - M_2)\chi'^{3/2}\,\omega'^{3/2}}{\omega''\,\chi''\left\{\dfrac{\omega\,\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''} - \dfrac{\chi\,\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right\}}, \\
&r + 2\,M_1\,s + M_1^2\,t = \\
&= (M_1 - M_2)\left\{\beta + \frac{2\,\omega'}{\omega''} + \frac{\omega'^3}{\omega''^2\left\{\dfrac{\omega\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''} - \dfrac{\chi\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right\}}\right\} \\
&r + 2\,M_2\,s + M_2^2\,t = \\
&= (M_2 - M_1)\left\{\alpha + \frac{2\,\chi'}{\chi''} - \frac{\chi'^3}{\chi''^2\left\{\dfrac{\omega\omega'' - 2\,\omega'^2}{4\,\omega''} - \dfrac{\chi\chi'' - 2\,\chi'^2}{4\,\chi''}\right\}}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \ (94)$$

La quantité C est ici encore toujours égalée à 0; la modification qu'il faudrait introduire dans le cas contraire est facile à faire.

L'intégration dépend maintenant du système (47). Si l'on fait la somme des quatre équations de ce système après en avoir multiplié trois par un facteur arbitraire, on arrive à une équation dont le système auxiliaire de Lagrange est

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\gamma} = \frac{dp}{r - m_1\,m_2\,L + \gamma\,(s + m_1\,L) + \delta\,(K_1 - m_1)} =$$

$$\frac{dq}{(s + m_2\,L) + \gamma\,(t - L) + \delta} = \frac{dr}{\varepsilon\,m_1^{\;2}} = \frac{ds}{-\,\varepsilon\,m_1} = \frac{dt}{\varepsilon} \quad . \ . \quad (95)$$

Eliminons les coefficients indéterminés γ, δ et ε, et remplaçons $K_1 - m_1$ par sa valeur $- M_1$, nous trouvons alors

$$\left.\begin{aligned}
&dp + M_1\,dq = dx\,\{r + M_1\,s + (M_1 - m_1)\,m_2\,L\} + \\
&\quad + dy\,\{s + M_1\,t - (M_1 - m_1)\,L\} = 0, \\
&\quad ds + m_1\,dt = 0, \qquad dr - m_1^2\,dt = 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (96)$$

Comme

$$\varDelta\,(L\,m_1) - M_1\,\varDelta\,L = m_1 - M_1,$$

la dernière des équations (96) donne

$$m_1 = \frac{d\{L(m_1 - M_1)\}}{dt} + M_1;$$

ce qui multiplié par dt donne, d'après la seconde équation de (96),

$$s + L(m_1 - M_1) + M_1 t = c$$

pour la première intégrale du système (96).

En nous servant de cette relation nous trouvons pour l'intégrale de la première équation de (96)

$$p + M_1 q - x\{r + M_1 s - (m_1 - M_1) m_2 L\} - y\{s + M_1 t + (m_1 - M_1) L\} = c'.$$

D'après (50) et (51) on a

$$L = \frac{r + (M_1 + M_2)s + M_1 M_2 t}{(m_1 - M_1)(m_2 - M_2)}.$$

Et par la substitution de cette valeur, nous pouvons mettre les intégrales trouvées sous la forme

$$\frac{r + (M_1 + m_2)s + M_1 m_2 t}{m_2 - M_2} = c,$$

$$p + M_1 q + (M_2 x - y)\frac{r + (M_1 + m_2)s + M_1 m_2 t}{m_2 - M_2} = c'.$$

Si nous faisons attention à la signification de β dans (93) et (94), nous voyons que l'équation suivante est une première intégrale de l'équation à intégrer:

$$p + M_1 q + \beta(M_2 x - y) = \varphi(\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (97)$$

En voici évidemment une autre:

$$p + M_2 q + \alpha(M_1 x - y) = \psi(\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (98)$$

En cherchant l'intégrale finale nous devons encore distinguer les cas ou M_1 et M_2 ont des valeurs égales et des valeurs différentes. Supposons en premier lieu que l'on ait $M_1 = M_2 = M$; alors d'après (97) et (98)

$$p + Mq = \frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\alpha - \beta}, \quad y - Mx = \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta} \quad . \; . \; . \; (99)$$

Ensuite

$$dp + Mdq = (r + Ms)\,dx + (s + Mt)dy = (s + Mt)(dy - Mdx) + Gdx;$$

donc

$$dx = \frac{dp + Mdq - (s + Mt)(dy - Mdx)}{G} \quad . \; . \; . \; (100)$$

Puis on a

$$dq = sdx + tdy = (s + Mt)dx + t(dy - M\,dx) = \frac{s + Mt}{G}(dp + Mdq) -$$

$$- \left\{ \frac{(s + Mt)^2}{G} - t \right\} (dy - Mdx) = \frac{s + Mt}{G}(dp + Mdq) - \frac{s^2 - rt}{G}(dy - Mdx). (101)$$

De (100) on déduit

$$x = \frac{p + Mq}{G} - \frac{s + Mt}{G}(y - Mx) - \int (p + Mq)\, d\frac{1}{G} +$$

$$+ \int (y - Mx)\, d\frac{s + Mt}{G} = - \frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\alpha - \beta}(\chi'' + \omega'') +$$

$$+ \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta}(\alpha\chi'' - \chi' + \beta\omega'' - \omega') + \int \frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\alpha - \beta}(\chi''' d\alpha + \omega''' d\beta) -$$

$$- \int \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta}(\alpha\,\chi'''\, d\alpha + \beta\,\omega'''\, d\beta) =$$

$$- \psi\,\chi'' - \varphi\,\omega'' - \frac{(\varphi - \psi)(\chi' + \omega')}{\alpha - \beta} + \int \psi\,\chi'''\, d\alpha + \int \varphi\,\omega'''\, d\beta.$$

De la même manière on déduit de (101)

$$q = - \psi(\alpha\,\chi'' - \chi') - \varphi(\beta\,\omega'' - \omega') -$$
$$- \frac{(\varphi - \psi)(\alpha\,\chi' - 2\chi + \beta\,\omega' - 2\omega)}{\alpha - \beta} + \int \alpha\,\psi\,\chi'''\, d\alpha + \int \beta\,\varphi\,\omega'''\, d\beta.$$

Enfin

$$dz = p\,dx + q\,dy = (p + Mq)\,dx + q\,d(y - Mx);$$

donc

$$z = q(y - Mx) + \int (p + Mq)\,dx - \int (y - Mx)\,dq = q(y - Mx) +$$

$$+ \int \left[\frac{(p + Mq)\,d(p + Mq) - (s + Mt) \left\{ (p + Mq)\,d(y - Mx) + \right.}{G} \right.$$

$$+\frac{(y-Mx)d(p+Mq)\}+(s^2-rt)(y-Mx)d(y-Mx)}{G}\Bigg] = q(y-Mx)+$$

$$+\frac{(p+Mq)^2-2(s+Mt)(p+Mq)(y-Mx)+(s^2-rt)(y-Mx)^2}{2\,G}-$$

$$-\int\frac{(p+Mq)^2}{2}\,d\,\frac{1}{G}+\int(p+Mq)\,(y-Mx)\,d\,\frac{s+Mt}{G}-$$

$$-\int\frac{(y-Mx)^2}{3}\,d\,\frac{(s^2-rt)}{G}=-\frac{\chi''\psi^2}{2}-\frac{\omega''\varphi^2}{2}-\frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}(\alpha\chi''\psi+\beta\omega''\varphi)-$$

$$-\left(\frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}\right)^2(\alpha\chi'+\beta\omega'-\chi-\omega)+\tfrac{1}{2}\int\chi'''\,\psi^2\,d\alpha+\tfrac{1}{2}\int\omega'''\,\varphi^2\,d\beta+$$

$$+\frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}\left\{\int\alpha\,\chi'''\,\varphi\,d\,\alpha+\int\beta\,\omega'''\,\varphi\,d\,\beta\right\}.$$

De cette manière nous avons exprimé encore une fois x, y et z en fonction de α et β.

Ce cas pourrait par une substitution relativement simple être ramené à un cas traité précédemment.

Dans le cas général $M_1 \gtrless M_2$, l'intégration pourrait encore être effectuée de telle manière que les trois variables x, y et z soient exprimées en α et β. La seule difficulté c'est la longueur des calculs et la complication des résultats. Cette difficulté d'ordre pratique nous force à indiquer seulement la manière d'opérer, sans effectuer les calculs.

En premier lieu, la différentiation des équations (97) et (98) donne

$$(r+M_1\,s+M_2\,\beta)\,d\,x+(s+M_1\,t-\beta)\,d\,y=(y-M_2\,x+\varphi')\,d\,\beta,$$
$$(r+M_2\,s+M_1\,\alpha)\,d\,x+(s+M_2\,t-\alpha)\,d\,y=(y-M_1\,x+\psi')\,d\,\alpha.$$

Si l'on tient compte de (81) et de la modification apportée dans les notations, on voit que ces équations peuvent être écrites d'une manière abrégée

$$\left.\begin{aligned}V_2\,d\,x+U_2\,d\,y&=(y-M_2\,x+\varphi')\,d\,\beta\\ V_1\,d\,x+U_1\,d\,y&=(y-M_1\,x+\psi')\,d\,\alpha\end{aligned}\right\}\quad\ldots\;(102)$$

A l'aide de (82) et (83), nous pouvons exprimer V_1, V_2, U_1 et U_2 en fonction de H_1, H_2 et G, qui à leur tour sont

des fonctions connues de α et β. U_1, V_1, U_2 et V_2 peuvent donc aussi être exprimés en α et β, et il ne reste plus qu'à intégrer les équations linéaires simultanées ci-dessus, une opération qui se ramène à de simples quadratures. De cette manière x et y sont exprimés en fonction de α et β. De (97) et (98) on tire p et q et enfin on obtient z par l'intégration de $dz = pdx + qdy$.

S'il est donné à intégrer une équation différentielle de la forme (1), et si l'on s'est assuré, à l'aide de l'équation (51), qu'elle appartient à ce cas d'intégrabilité, alors on peut, ou bien substituer dans cette équation les valeurs de r, s et t tirées de (94), et déterminer ainsi les fonctions χ et ω, opération par laquelle U_1, U_2, V_1 et V_2 seraient encore une fois exprimés en fonction de α et β; ou bien on peut tirer r, s et t de l'équation donnée et des deux équations qui déterminent α et β; ou encore exprimer r, s, t, α et β en fonction de deux nouvelles variables dont le choix dépendra des cas. La suite dépend alors de l'intégration du système linéaire (102), intégration qu'il est toujours possible d'effectuer.

Il reste encore à traiter le cas où l'équation (48) est satisfaite sans que la valeur de $K_1 - m_1$ soit constante. Dans ces conditions nous n'avons pas réussi à obtenir une solution aussi complète que dans les cas précédents. Si nous introduisons R et T dans l'équation (48) et dans celle que nous pouvons en déduire par la permutation de m_1 et m_2, de la même manière que nous l'avons fait précédemment, nous arrivons à deux équations très-compliquées qui, considérées comme équations différentielles en r et t comme variables indépendantes et s comme variable dépendante, sont du quatrième ordre. Nous ne sommes pas parvenus à décider si, comme dans le cas précédent, ces équations peuvent être réunies en une seule d'ordre inférieur, ou si, cela étant, cette équation peut être intégrée plus complètement.

Cependant, encore alors, les premières integrales se déter-

minent facilement. De la même manière que dans le cas précédent le système (95) se déduit de (47), et l'élimination de γ, δ et ε conduit au système

$$\left.\begin{array}{c} dp+(m_1-K_1)\,dq = dx\,\{r+m_1 s-K_1(s+m_2 L)+ \\ +dy\,\{s+m_1 t-K_1(t-L)\}=0, \\ dr+m_1\,ds=0, \qquad dr-m_1^2\,dt=0. \end{array}\right\} \quad (103)$$

Cette dernière équation, combinée avec (48), donne l'intégrale

$$m_1-K_1=c;$$

et combinée avec celle-ci, la première donne

$$p+(m_1-K_1)q-x\{r+m_1 s-K_1(s+m_2 L)\}-y\{s+m_1 t-K_1(t-L)\}=c'.$$

Les premières intégrales sont donc

$$\left.\begin{array}{l} p+(m_1-K_1)\,q-x\,\{r+m_1\,s+K_1\,(s+m_2\,L)\}- \\ \quad -y\,\{s+m_1\,t-K_1\,(t-L)\}=\varphi\,(m_1-K_1), \\ p+(m_2-K_2)\,q-x\,\{r+m_2\,s-K_2\,(s+m_1\,L)\}- \\ \quad -y\,\{s+m_2\,t-K_2\,(t-L)\}=\psi\,(m_2-K_2). \end{array}\right\} \quad ..\,(104)$$

La suite de l'intégration n'est évidemment possible que sur une équation différentielle donnée. Ici encore elle dépend d'un système d'équations différentielles linéaires simultanées.

Si une des deux valeurs de m_1-K_1 et m_2-K_2 était constante, une des premières intégrales aurait la forme (97) ou (98), l'autre la forme (104).

Nous avons supposé partout que l'équation (1) était résolue par rapport à s. On verra aisément que, si l'équation donnée était mise sous la forme

$$f(r,s,t)=0,$$

il suffirait de remplacer partout R par $-\dfrac{\frac{df}{dr}}{\frac{df}{ds}}$ et T par $-\dfrac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{ds}}$,

et de même pour les dérivées d'ordre supérieur. Mais en opérant sur l'équation résolue, nous avons exclu le cas où

l'équation différentielle ne contient pas s. Nous nous proposons de traiter aussi ce cas et nous supposerons que l'équation est résolue par rapport à r; nous avons donc à intégrer:

$$r = F(t). \qquad (105)$$

Alors $m_1 = -m_2$ est une fonction de t, que nous représenterons par m. Les équations (39) deviennent:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + (p - mq)\frac{dw}{dz} + (r - ms)\frac{dw}{dp} + (s - mt)\frac{dw}{dq} = 0, \\ m^2\frac{dw}{dr} - m\frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

En appliquant l'opération de Jacobi, on a

$$-\frac{dm}{dt}\frac{dw}{dy} - q\frac{dm}{dt}\frac{dw}{dz} + \left(2m^2 - s\frac{dm}{dt}\right)\frac{dw}{dp} - \left(2m + t\frac{dm}{dt}\right)\frac{dw}{dq} = 0. \qquad (107)$$

Cette équation devient une identité du moment que $m = 0$, et l'équation donnée a la forme

$$r = a.$$

Dans ce cas il y a six intégrales de (106), donc cinq en dehors de $r =$ constante, savoir

$$y = c,\ s = c',\ p - rx = c'',\ z - px + \tfrac{1}{2} rx^2 = c''',\ q - sx = c''''.$$

De la première, la troisième et la quatrième on tire

$$p - rx = \varphi(y), \qquad z - px + \tfrac{1}{2} rx^2 = \psi(y);$$

et l'élimination de p et r donne

$$z = \tfrac{1}{2} ax^2 + x\varphi(y) + \psi(y),$$

ce que l'on trouve encore facilement d'un foule d'autres manières.

Si m n'est pas nul, mais égal à une autre valeur constante, l'équation est de la forme

$$r = at + b.$$

L'équation (107) se transforme en

$$m\frac{dw}{dp} - \frac{dw}{dq} = 0; \qquad (108)$$

et d'après cette relation la première équation (106) se simplifie:

$$\frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + (p - mq)\frac{dw}{dz} + r\frac{dw}{dp} - mt\frac{dw}{dq} = 0.$$

Celle-ci donne avec (108)

$$\frac{dw}{dz} = 0.$$

On ne peut plus tirer de là d'autres équations; le système est donc

$$\frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + r\frac{dw}{dp} - mt\frac{dw}{dq} = 0, \quad m\frac{dw}{dp} - \frac{dw}{dq} = 0,$$

$$m^2\frac{dw}{dr} - m\frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0.$$

En dehors de l'équation donnée il doit donc y avoir ici trois intégrales. Ce sont

$$y + mx = c, \quad s + mt = c', \quad p + mq - (r - m^2 t)\,x = c''.$$

Comme $r - m^2 t = b$, on a la première intégrale

$$p + mq - bx = \varphi(y + mx);$$

et le second système auxiliaire donne de la même façon

$$p - mq - bx = \psi(y - mx).$$

On déduit de là:

$$p - bx = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\psi,$$

$$q = \frac{\varphi - \psi}{2m};$$

donc

$$dz = bx\,dx + \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\,dx + \frac{\varphi - \psi}{2m}\,dy.$$

En introduisant de nouvelles fonctions arbitraires nous trouvons

$$z = \tfrac{1}{2}bx^2 + \chi(y + mx) + \omega(y - mx).$$

Si m est une fonction de t proprement dite on peut diviser (107) par $\frac{dm}{dt}$, et cette équation devient alors

$$\frac{dw}{dy} + q\frac{dw}{dz} + \left(s - \frac{2\,m^2}{\frac{d\,m}{dt}}\right)\frac{dw}{dp} + \left(t + \frac{2\,m}{\frac{d\,m}{dt}}\right)\frac{dw}{dq} = 0;$$

et à l'aide de celle-ci la première équation (106) se transforme en

$$\frac{dw}{dx} + p\,\frac{dw}{dz} + \left(r - \frac{2\,m^3}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp} + \left(s + \frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dq} = 0.$$

Les deux dernières équations donnent encore ensemble

$$\frac{dw}{dz} = 0;$$

puis, combinées avec la deuxième équation (106),

$$-\left(m + \frac{d}{dt}\,\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp} + \left(1 + \frac{d}{dt}\,\frac{2\,m}{\frac{d\,m}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,q} = 0,$$

$$\left(m^2 - \frac{d}{d\,t}\,\frac{2\,m^3}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,p} + \left(-\,m + \frac{d}{d\,t}\,\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,q} = 0.$$

On s'assure facilement que la dernière équation est une conséquence de l'avant dernière, de sorte que nous avons le système des cinq équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dw}{dx} + (r - m^2 K)\,\frac{dw}{d\,p} + (s + mK)\,\frac{dw}{d\,q} = 0,\\
&\frac{dw}{d\,y} + (s - m\,K)\,\frac{dw}{d\,p} + (t + K)\,\frac{dw}{d\,q} = 0,\\
&\frac{dw}{d\,z} = 0,\quad \left(3\,m + m\frac{dK}{dt}\right)\frac{dw}{d\,p} - \left(1 + \frac{dK}{dt}\right)\frac{dw}{d\,q} = 0,\\
&m^2\,\frac{dw}{dr} - m\,\frac{dw}{d\,s} + \frac{dw}{d\,t} = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots (109)$$

où nous avons posé

$$K = \frac{2\,m}{\frac{d\,m}{d\,t}}.$$

Ce n'est que dans le cas où nous ne pouvons plus déduire d'ici de nouvelles équations qu'il est possible que les deux intégrales nécessaires se trouvent dans le premier système auxiliaire. Il faut et il suffit pour cela que

$$\frac{d}{dt} m \left(1 + \frac{2}{1 + \frac{dK}{dt}}\right) = 0;$$

ou bien

$$m \left(1 + \frac{2}{1 + \frac{dK}{dt}}\right) = \text{constante} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (110)$$

Dans (110) nous représenterons la constante par $\frac{b^2}{a^2}$; alors

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{2m}{\frac{dm}{dt}} = 2 - \frac{2m \frac{d^2m}{dt^2}}{\left(\frac{dm}{dt}\right)^2} = \frac{3a^2m - b^2}{b^2 - a^2m};$$

et par conséquent

$$\frac{d \frac{dm}{dt}}{\frac{dm}{dt}} = \frac{5a^2m - 3b^2}{2m(a^2m - b^2)} dm; \quad \text{ou} \quad \frac{dm}{dt} = (a^2m - b^2) m^{3/2};$$

donc aussi

$$t + c = \frac{2}{b^2 \sqrt{m}} + \frac{a}{b^3} \log. \frac{a\sqrt{m} - b}{a\sqrt{m} + b}; \quad . \; . \; . \; . \quad (111)$$

où c est une nouvelle constante d'intégration. Comme en outre

$$m^2 = \frac{dF}{dt} = \frac{dr}{dt},$$

on a

$$r + g = \int m^2 \, dt;$$

ou, en effectuant les calculs,

$$r+g=\frac{2}{a^2}\sqrt{m}+\frac{b}{a^3}\ \log.\ \frac{a\sqrt{m}-b}{a\sqrt{m}+b} \quad \ldots\ldots (112)$$

Donc, pour que ce cas d'intégrabilité se présente, il faut que l'équation à intégrer soit le résultat de l'élimination de m entre (111) et (112). Cette élimination est facile à faire, mais conduit à une équation assez compliquée.

Pour K on trouve aisément la valeur suivante:

$$K=\frac{2}{(a^2m-b^2)\sqrt{m}}.$$

Dans le système (109) la quatrième équation peut être mise sous la forme plus simple

$$b^2\frac{dw}{dp}-a^2\frac{dw}{dq}=0.$$

En opérant de la même manière que sur les équations (47), que nous avons ramenées à la forme (96), nous trouvons ici les intégrales

$$s+\int m\,dt=c_1,$$

$$a^2p+b^2q-x\{a^2(r-m^2K)+b^2(s+mK)\}-y\{a^2(s-mK)+b^2(t+K)\}=c_1'.$$

Si l'on pose encore

$$\int m\,dt=L,$$

on a pour une première intégrale de l'équation différentielle

$$a^2p+b^2q-x\{a^2(r-m^2K)+b^2(s+mK)\}$$
$$-y\{a^2(s-mK)+b^2(t+K)\}=\varphi(s+L);$$

et pour une autre

$$a^2p-b^2q-x\{a^2(r-m^2K)-b^2(s-mK)\}-$$
$$-y\{a^2(s+mK)-b^2(t+K)\}=\psi(s-L).$$ [1])

---

[1]) Si l'on remplace dans (110) m par $-m$ et que l'on répète pour le reste les mêmes opérations, on voit que b et a doivent alors être remplacés par $b\varepsilon$ et $a\varepsilon^3$, ε représentant une racine quatrième de -1, car

tandis que L a pour valeur

$$L = \frac{1}{ab} \log. \frac{a\sqrt{m} - b}{a\sqrt{m} + b}.$$

Substituons à la place de r, t et K leurs valeurs exprimées en fonction de m et L, et prenons la demi-somme et la demi-différence des équations ci-dessus, il vient:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 p - x(b^2 L - a^2 g) - y a^2 s = \frac{\varphi + \psi}{2}, \\ b^2 q - x b^2 s - y (a^2 L - b^2 c) = \frac{\varphi - \psi}{2}. \end{array}\right\} \quad \ldots (113)$$

Considérons maintenant m et s comme des variables indépendantes, et différentions par rapport à ces quantités; en exprimant t, r et dL en fonction de m il vient

$$2\sqrt{m}\frac{dx}{ds} - a^2 y = \frac{\varphi' + \psi'}{2}, \quad \frac{2}{\sqrt{m}}\frac{dy}{ds} - b^2 x - \frac{\varphi' - \psi'}{2}, \quad . \ (114)$$

$$2m(a^2 m - b^2)\frac{dx}{dm} - b^2 x = \frac{\varphi' - \psi'}{2}, \quad 2(a^2 m - b^2)\frac{dy}{dm} - a^2 y = \frac{\varphi' + \psi'}{2} \quad . \ (115)$$

L'intégration de (115) donne

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 m - b^2)}}{\sqrt{m}} \left\{ S_1 + \int \frac{(\varphi' - \psi')\, dm}{4\,(a^2 m - b^2)^{3/2} m^{1/2}} \right\},$$

$$y = \sqrt{(a^2 m - b^2)} \left\{ S_2 + \int \frac{(\varphi' + \psi')\, dm}{4\,(a^2 m - b^2)^{3/2}} \right\},$$

où S_1 et S_2 ne dépendent que de s seul.

La substitution de ces valeurs dans (114) donne pour la détermination de S_1 et S_2 les relations suivantes:

$$2\frac{dS_1}{ds} - a^2 S_2 = 0, \quad 2\frac{dS_2}{ds} - b^2 S_1 = 0,$$

---

sans cela t et r n'auraient plus la même valeur qu'antérieurement, ce qui est évidemment nécessaire. On s'aperçoit aussi que K ne change pas non plus, et que L change seulement de signe. Le facteur imaginaire $\pm i = \varepsilon^2$ peut être mis dans la fonction ψ.

d'où il suit

$$S_1 = a\left(\alpha e^{\frac{abs}{2}} + \beta e^{-\frac{abs}{2}}\right),\quad S_2 = b\left(\alpha e^{\frac{abs}{2}} - \beta e^{-\frac{abs}{2}}\right),$$

Si nous représentons par α et β de nouvelles constantes d'intégration.

Introduisons ces valeurs, et exprimons m en fonction de L; il vient

$$x = 2\,a^2\,\frac{\alpha e^{\frac{1}{2}abs} + \beta e^{-\frac{1}{2}abs}}{e^{-\frac{1}{2}abL} + e^{\frac{1}{2}abL}} +$$

$$+ \frac{a}{4\,b\,(e^{-\frac{1}{2}abL} + e^{\frac{1}{2}abL})}\int(\varphi' - \psi')\,(e^{-\frac{1}{2}abL} - e^{\frac{1}{2}abL})\,dL,$$

$$y = 2\,b^2\,\frac{\alpha e^{\frac{1}{2}abs} - \beta e^{-\frac{1}{2}abs}}{e^{-\frac{1}{2}abL} - e^{\frac{1}{2}abL}} +$$

$$+ \frac{b}{4\,a\,(e^{-\frac{1}{2}abL} - e^{\frac{1}{2}abL})}\int(\varphi' - \psi')\,(e^{-\frac{1}{2}abL} + e^{\frac{1}{2}abL})\,dL.$$

On obtient des expressions exemptes d'intégrales en posant

$$e^{\frac{1}{2}ab(s+L)} = \mu_1,\qquad \varphi'(s+L) = -2\,a^2\,b^2\,\mu_1^2\,\chi'''(\mu_1),$$
$$e^{\frac{1}{2}ab(s-L)} = \mu_2,\qquad \psi'(s-L) = 2\,a^2\,b^2\,\mu_2^2\,\omega'''(\mu_2);$$

on trouve ainsi

$$x = a^2\left\{\frac{\alpha\mu_1\mu_2 + \beta + (\mu_1-\mu_2)\mu_1\chi'' - 2\mu_1\chi' + 2\chi + (\mu_2-\mu_1)\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1+\mu_2}\right\},$$

$$y = b^2\left\{\frac{\alpha\mu_1\mu_2 - \beta - (\mu_1+\mu_2)\mu_1\chi'' + 2\mu_1\chi' - 2\chi - (\mu_1+\mu_2)\mu_2\omega'' + 2\mu_2\omega' - 2\omega}{\mu_2-\mu_1}\right\}.$$

Il est aisé de voir que α et β peuvent être compris dans les fonctions arbitraires; on peut donc écrire plus simplement

$$x = a^2\,\frac{(\mu_1-\mu_2)\,\mu_1\,\chi'' - 2\,\mu_1\chi' + 2\,\chi + (\mu_2-\mu_1)\,\mu_2\omega'' - 2\,\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1+\mu_2},$$

$$y = b^2\,\frac{(\mu_1+\mu_2)\,\mu_1\,\chi'' - 2\mu_1\chi' + 2\,\chi + (\mu_1+\mu_2)\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1-\mu_2}.$$

De (113) on déduit

$$p + g\,x = \frac{b\,x}{a^3}\,log.\,\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{y}{ab}\,log.\,\mu_1\,\mu_2 - 2\,\frac{b}{a}\,(\mu_1\,\chi'' - \chi' - \mu_2\omega'' + \omega'),$$

$$q + c\,y = \frac{a\,y}{b^3} \log.\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{x}{a\,b} \log.\mu_1\mu_2 - 2\,\frac{a}{b}\,(\mu_1\chi'' - \chi' + \mu_2\omega'' - \omega');$$

et l'on a ensuite

$$\frac{d\,(z + \tfrac{1}{2}\,g\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,c\,y^2)}{d\,\mu_1} = (p + g)\,\frac{d\,x}{d\,\mu_1} + (q + c)\,\frac{d\,y}{d\,\mu_1}\,,$$

ou bien

$$\frac{d(z + \tfrac{1}{2}g\,x^2 + \tfrac{1}{2}c\,y^2)}{d\,\mu_1} = \frac{(b^2x + a^2y)}{a^3b^3}\,\frac{d\,(b^2x + a^2y)}{d\,\mu_1}\,log\;\mu_1$$
$$- \frac{(b^2x - a^2y)}{a^3b^3}\,\frac{d\,(b^2x - a^2y)}{d\,\mu_1}\,log\;\mu_2$$
$$- 2\,\frac{d\;(b^2x\;+\;a^2y)}{a\,b\,d\,\mu_1}\,(\mu_1\,\chi'' - \chi') + 2\,\frac{d\,(b^2x - a^2y)}{a\,b\,d\,\mu_1}\,(\mu_2\omega'' - \omega').$$

En effectuant une partie de l'intégration on trouve

$$z + \tfrac{1}{2}\,g\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,c\,y^2 = \frac{(b^2x + a^2y)^2}{2\,a^3b^3}\,log\;\mu_1 - \frac{b^2x - a^2y}{2\,a^3b^3}\,log\;\mu_2$$
$$- \frac{2\,(b^2x + a^2y)}{ab}\,(\mu_1\chi'' - \chi') + \frac{2\,(b^2x - a^2y)}{a\,b}\,(\mu_2\,\omega'' - \omega')$$
$$- \int \frac{(b^2x + a^2y)\,(b^2x + a^2y - 4\,a^2b^2\,\mu_1^2\chi''')}{2\,a^3\,b^3\,\mu_1}\,d\mu_1.$$

Posons pour simplifier

$$\mu_1^2\chi'' - \mu_1\chi' + \chi + \mu_2^2\omega'' - \mu_2\omega' + \omega = P,$$

il vient

$$b^2x + a^2y = -\,2\,a^2b^2\mu_1\,\chi'' + 4\,a^2b^2\,\frac{\mu_1\,P}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\,;$$

et en substituant on trouve pour l'intégrale qui reste la valeur

$$-\,2\,a\,b \int \mu_1 \left(\frac{2\,P}{\mu_1^2 - \mu_2^2} - \chi''\right)\left(\frac{2\,P}{\mu_1^2 - \mu_2^2} - \chi'' - 2\mu_1\chi'''\right) d\,\mu_1;$$

ou bien

$$-2ab\int \mu_1\chi''(\chi'' + 2\mu_1\chi''')d\mu_1 + 8ab\int \left\{\frac{P}{(\mu_1^2 - \mu_2^2)}(\chi'' + \mu_1\chi''') - \frac{P^2}{(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2}\right\}\mu_1 d_1\mu_1,$$

c'est-à-dire

$$4\,a\,b\,\frac{P^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} - 2\,ab\,\mu_1^2\,\chi''^2 + 2\,ab \int \mu_1\,\chi''^2\,d\,\mu_1.$$

Substituons dans la valeur de z, et ajoutons la fonction de μ_2 qui est nécessaire pour rétablir la symétrie, il vient

$$z + \tfrac{1}{2} g x^2 + \tfrac{1}{2} c y^2 = \frac{(b^2x + a^2y)^2}{2a^3b^3} \log \mu_1 - \frac{(b^2x - a^2y)^2}{2a^3b^3} \log \mu_2$$

$$- \frac{2(b^2x + a^2y)}{ab}(\mu_1 \chi'' - \chi') + \frac{2(b^2x - a^2y)}{ab}(\mu_2 \omega'' - \omega')$$

$$+ 4ab \frac{P^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} - 2ab\,\mu_1^2 \chi''^2 + 2ab\,\mu_2^2 \omega''^2$$

$$+ 2ab \int \mu_1 \chi''^2 d\mu_1 - 2ab \int \mu_2 \omega''^2 d\mu_2$$

A l'aide des relations

$$b^2 x + a^2 y = -2a^2b^2 \mu_1 \chi'' + 4a^2b^2 \frac{\mu_1 P}{\mu_1^2 - \mu_2^2},$$

$$b^2 x - a^2 y = -2a^2b^2 \mu_2 \omega'' - 4a^2b^2 \frac{\mu_2 P}{\mu_1^2 - \mu_2^2},$$

cette expression se transforme encore en

$$z + \tfrac{1}{2} gx^2 + \tfrac{1}{2} cy^2 = \frac{(b^2 x + a^2 y)^2}{2a^3b^3} \log \mu_1$$

$$- \frac{(b^2 x - a^2 y)^2}{2a^3b^3} \log \mu_2 - \frac{b^2 x + a^2 y}{ab\,\mu_1}(\mu_1^2 \chi'' - \mu_1 \chi' - \chi)$$

$$+ \frac{(b^2 x - a^2 y)}{ab\,\mu_2}(\mu_2^2 \omega'' - \mu_2 \omega' - \omega) - 2ab(\mu_1 \chi' - \chi - \mu_2 \omega' + \omega)$$

$$+ 2ab \int \mu_1 \chi''^2 d\mu_1 - 2ab \int \mu_2 \omega''^2 d\mu_2.$$

Il y a deux cas limites, où l'intégrale générale devient illusoire, à savoir $a = 0$ et $b = 0$. Ces deux cas se transforment l'un dans l'autre par la permutation de x et y.

Pour $a = 0$, (110) devient

$$\frac{dK}{dt} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{2m}{\frac{dm}{dt}}\right) = -1\,;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$m = \frac{3c}{(t+b)^2},$$

c et b étant les constantes d'intégration.

Ensuite, comme

$$r = \int \frac{dr}{dt} dt = \int m^2 \, dt,$$

on trouve pour l'équation à intégrer la forme

$$(r + a)(t + b)^3 + 3c^2 = 0.$$

Le système (109) se transforme maintenant en

$$\frac{dw}{dx} + \left(s - \frac{3c}{t+b}\right)\frac{dw}{dq} = 0, \qquad \frac{dw}{dy} - b\frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dp} = 0, \qquad \frac{dw}{dr} m^2 - \frac{dw}{ds} m + \frac{dw}{dt} = 0.$$

Traitant ce système, comme nous l'avons fait pour les autres systèmes semblables, nous arrivons aux équations

$$dq = -bdy + \left(s - \frac{3c}{t+b}\right) dx, \;\; dr + mds = 0, \;\; ds + mdt = 0,$$

dont voici des intégrales

$$s - \frac{3c}{t+b} = c_1, \qquad q + by - \left(s - \frac{3c}{t+b}\right) x = c_1'.$$

Si l'on représente $\frac{3c}{t+b}$ par τ, les premières integrales de (116) sont donc

$$q + by = (s - \tau)\, x + 2\,\varphi''\,(s - \tau),$$
$$q + by = (s + \tau)\, x + 2\,\psi''\,(s + \tau).$$

On tire de là d'abord

$$x = \frac{\varphi'' - \psi''}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

Ensuite

$$q + by = sx + (\varphi'' + \psi''), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

d'où il suit par différentiation

$$(t + b)\frac{dy}{ds} = x + \varphi''' + \psi''' \text{ ou } \frac{dy}{ds} = \frac{\varphi'' - \psi''}{3c} + \frac{\tau}{3c}(\varphi''' + \psi''');$$

et de la même manière

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\tau}{3c}(\varphi''' - \psi''').$$

Par intégration il vient

$$y = \frac{\tau(\varphi'' + \psi'') + \varphi' - \psi'}{3c}.$$

Ensuite

$$\frac{d(p+ax)}{ds} = (r+a)\frac{dx}{ds} + s\frac{dy}{ds} = -\frac{\tau^2}{9c}(\varphi''' - \psi''') + \frac{s\tau}{3c}(\varphi''' + \psi''') + \frac{s}{3c}(\varphi'' - \psi''),$$

$$\frac{d(p+ax)}{d\tau} = \frac{\tau^2}{9c}(\varphi''' + \psi''') + \frac{\tau}{9c}(\varphi'' - \psi'') - \frac{s\tau}{3c}(\varphi''' - \psi'''),$$

d'où

$$p + ax = -\frac{\tau^2}{9c}(\varphi'' - \psi'') + \frac{s\tau}{3c}(\varphi'' + \psi'') + \frac{s}{3c}(\varphi' - \psi') - \frac{\tau}{3c}(\varphi' + \psi') - \frac{\varphi - \psi}{3c},$$

et de (117) et (118) il suit

$$q + by = \frac{s}{\tau}(\varphi'' - \psi'') + (\varphi'' + \psi'').$$

Enfin en introduisant ces valeurs dans

$$d(z + \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{2}by^2) = (p + ax)\,dx + (q + by)\,dy,$$

et en effectuant autant que possible les intégrations on a

$$z + \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{2}by^2 = -\frac{2\tau}{9c}(\varphi''^2 + \psi''^2 + \varphi''\psi'') +$$

$$+ \frac{s}{3c}(\varphi''^2 - \psi''^2) - \frac{1}{3c}(\varphi' + \psi')(\varphi'' - \psi'')$$

$$+ \frac{s}{3c\tau}(\varphi' - \psi')(\varphi'' - \psi'') - \frac{1}{3c\tau}(\varphi - \psi)(\varphi'' - \psi'') + \frac{1}{2c}\int \varphi''^2 d(s - \tau)$$

$$- \frac{1}{2c}\int \psi''^2\, d(s + \tau).$$

Dans l'autre cas limite, $b = 0$, on tire de (110)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2m}{\frac{dm}{dt}}\right) = -3.$$

L'intégration de cette équation nous apprend que l'équation à intégrer est

$$(r + a)^3 (t + b) + 3c^2 = 0,$$

de sorte que nous sommes ramenés au cas précédent, avec cette différence que x est changé en y et réciproquement.

Pour terminer, comparons la méthode employée ici avec celle que Legendre applique à l'intégration de l'équation

$$f(r, s, t) = 0.$$

Cette méthode consiste à prendre s et t pour variables indépendantes et $v = q - sx - ty$ comme variable dépendante. L'équation est ramenée alors à la forme linéaire

$$R \frac{d^2 v}{d t^2} - \frac{d^2 v}{ds\, dt} + T \frac{d^2 v}{d s^2} = 0,$$

que l'on intègre, si possible, par la méthode de Monge. Le premier système auxiliaire de Monge, auquel cette équation conduit est

$$ds + m_1\, dt = 0, \quad dx - m_2\, dy = 0, \quad dv = - xds - ydt,$$

où m_1 et m_2 ont la même signification que tantôt.

Au moyen de ce système auxiliaire on trouve maintenant les premières intégrales sous la même forme que nous les avons trouvées dans les cas où elles ne contenaient ni z, ni p, ni r. Par l'échange de r et t, on les trouverait aussi dans les cas où il n'y a ni z, ni q, ni t. Si l'on ajoute au système auxiliaire de Monge encore les deux équations suivantes:

$$dz = pdx + qdy \qquad dp = rdx + sdy,$$

ce système devient tout à fait identique à celui auquel conduit la méthode que nous avons suivie, et donne par conséquent tout à fait les mêmes résultats.

SUR LE

SILLON PRÉAURICULAIRE DE L'ILION

PAR

T. ZAAIJER.

---

1. Le sillon préauriculaire comme caractère de race.

Lors des recherches que je fis, il y a longtemps déjà, sur vingt-six bassins de femmes javanaises [1]), je trouvai que la plupart de ces bassins présentaient, en avant de la surface auriculaire, un sillon sinon encore inobservé, du moins non encore décrit jusqu'en ce moment, et que je proposai de nommer sillon préauriculaire (*sulcus praeauricularis*). Voici ce que je disais à ce propos [2]):

„Je parlerai maintenant de ce sillon en avant de la surface auriculaire, dont j'ai fait mention lors de la description de chaque bassin, et pour lequel je propose le nom de sillon préauriculaire. Aucun anatomiste ne s'en est, que je sache, occupé jusqu'à présent; et pourtant il mérite, me semble-t-il, amplement l'attention. Le sillon présente, dans les divers bassins, une largeur et une profondeur très-différentes; le fond en est d'ordinaire légèrement rugueux et inégal, ce qui est parfaitement d'accord avec sa destination. Il résulte en effet des recherches spéciales instituées par moi à ce sujet qu'il sert

---

[1]) T. Zaaijer, *Untersuchungen über die Form des Beckens javanischer Frauen*, herausgeg. von der Holländ. Ges. d. Wiss. zu Haarlem. *Natuurk. Verhand.* Deel XXIV, 1866. Extrait dans *Archiv. néerland.* T. I, 1866, p. 328.

[2]) *l.c.*, pp. 28 et 29.

à l'insertion du ligament sacro-iliaque antérieur. Le sillon s'étend, dans certains cas, le long du bord antérieur entier de la surface auriculaire; mais le plus souvent on ne le trouve qu'en avant de la partie de cette surface située sous la ligne innominée. Il ne faisait complètement défaut que dans trois des bassins (13, 20, 25). Le sillon représenté fig. III, Pl. V peut être considéré comme un cas de développement normal.

„Il m'a semblé n'être pas dépourvu d'intérêt de rechercher si le sillon préauriculaire se trouverait aussi sur les ilions de provenance européenne. J'ai examiné à cet effet 41 ilions européens, et je trouvai le sillon sur sept d'entre eux, mais avec un faible développement; sur quatre bassins il était à peine visible, et les 30 derniers exemplaires n'en offraient pas la moindre trace."

Je pus donc conclure donc comme suit: „S'il est permis de tirer une conclusion certaine du nombre encore restreint de mes observations, il semble que le sillon préauriculaire se montre plus souvent sur le bassin des femmes javanaises qu'ailleurs, et qu'il y est dans la plupart des cas mieux développé."

J'ai résumé de la manière suivante, à la fin de mon travail, les résultats de mes recherches [1]):

„5e. Le sillon préauriculaire que l'on rencontre sur la plupart des bassins de femmes javanaises, ou bien manque totalement sur les bassins européens, ou n'y présente qu'un faible développement; il sert à l'insertion du ligament sacro-iliaque antérieur."

Il résulte donc de ces lignes que je me suis borné, pour ce qui concerne la signification anthropologique du sillon préauriculaire, à constater le fait que celui-ci se rencontre

---

1) p. 38.

bien plus fréquemment chez les femmes javanaises que sur les bassins européens On ne peut encore en aucune manière déduire de ceci que j'aie considéré le sillon comme „caractère de race''. J'ai d'autre part établi par des recherches spéciales que le sillon sert à l'insertion du ligament sacro-iliaque antérieur.

Plusieurs auteurs m'ont attribué une opinion entièrement différente au sujet de la signification anthropologique du sillon préauriculaire. D'autres observateurs n'ont point partagé mon avis sur son caractère anatomique.

Depuis la publication de mon travail, on a fait connaître de nombreuses recherches sur des bassins provenant de diverses races humaines. Je me propose de les passer brièvement en revue.

En 1868, Görtz [1]) décrivit le bassin d'une *femme boschimane.* Celle-ci avait été exposée dans plusieurs villes d'Europe sous le nom d'Afandy. A sa mort, arrivée dans l'été de 1866 à l'âge de 38 ans, son bassin vint en possession de M. le Prof. von Luschka. Görtz a eu connaissance de mes recherches; seulement il ne mentionne pas dans son travail si le sillon préauriculaire était ou non représenté sur le bassin examiné par lui.

L'année suivante, O. von Franque [2]) décrit quelques bassins de femmes de différentes races.

Le sillon préauriculaire faisait défaut sur le bassin d'une Indienne Tête-plate (flathead) de l'île Vancouver, côte occidentale de l'Amérique du Nord. Il était distinctement visible du côté gauche d'un bassin de Malaise. Le bassin d'une Chinoise ne le montrait pas, et celui d'une Négresse d'Afrique pas davantage. Ces quatre bassins

---

[1]) Görtz, *Ueber das Becken eines Buschweibes.* Inaug. Diss. Tübingen, 1868.

[2]) O. von Franque. *Ueber die weiblichen Becken verschiedener Menschenracen* in: Scanzoni's *Beiträge zur Geburtskunde*, Bd. VI, 1869, p. 163.

provenaient de la collection anatomique de l'Université de Würzbourg. Le sillon était passablement profond sur le bassin d'une Négresse Papou du Nord-est de Luçon, groupe des Philippines, provenant de la collection de M. le Prof. Semper à Würzbourg [1]). Le bassin d'une Négresse (?) d'Amérique, de la collection de Clinique obstétricale de Würzbourg, en offrait une simple trace [2]).

Mon ancien élève, le Dr. I. van West [3]), en ce moment médecin praticant aux Indes occidentales, traite dans sa thèse inaugurale (1870) de deux bassins de femme provenant de Surinam. Le premier, appartenant à M. le Dr. Dumontier, provient d'une Indienne de la tribu des Warraw ou Warrauw. Le deuxième bassin a été donné avec les autres parties du squelette au Museum Vrolikianum à Amsterdam par le Dr. Dumontier. Le catalogue [4]) de cette riche collection mentionne ce squelette comme suit: Squelette que le Dr. Dumontier de Surinam a donné sous le nom de Caraïbe." Le bassin de l'Indienne présentait très-clairement le sillon préauriculaire, surtout du côté droit. Le bassin de la femme Caraïbe ne montrait qu'un très-léger indice de ce sillon, très-léger surtout du côté gauche.

---

[1]) Ce bassin avait été rapporté par le Prof. Semper lui-même, lors de son long voyage dans les Philippines.

[2]) Le Dr. Henschel, à New-York, envoya il y a de longues années ce bassin au Prof. d'Outrepont, avec une lettre, dans laquelle il dit entre autres: "Je prends en même temps la liberté de vous envoyer un bassin de Négresse; il est vieux, mais de provenance authenthique. Je ne prétendrai pas cependant qu'il ait appartenu à une négresse de race pure; peut-être provient-il d'une mulâtresse ou d'une quarteronne". Ce bassin a été placé par le Prof. d'Outrepont dans sa collection.

[3]) I. van West, *Twee Indiaansche bekkens uit de Kolonie Suriname*, Acad. Proefschr. Leiden, 1870, blz. 4 en 9.

[4]) Dusseau. *Catalogue de la collection d'anatomie humaine, comparée et pathologique de* MM. Ger. *et* W. Vrolik, Amsterdam, 1865, p. 125, N. 290, 2.

En 1873 seulement, M. H. Fritsch [1]) décrivit cinq bassins des Indes orientales, qui jadis avaient été donnés par le Dr. Swaving de Batavia à mon ami le Prof. H. Welcker à Halle. Celui-ci en fit don à la collection de clinique obstétricale, placée alors sous la direction du Prof. Olshausen.

Voici ce que rapporte M. Fritsch au sujet du sillon préauriculaire:

I. Tjeng beng, XXXV ann. mulier Sundaica, nat. Bekassie, „s. p. non exstat nisi infra introitum in pelvim" [2])

II. Salipea, femina Malayca XXXVI ann. nat. Batavia, „s. p. infra introitum in pelvim non multum significatum est" [3]).

III. Dja nam, 36 ann. Sundaica-Bantam „s. p. infra lineam terminalem maxime manifestus, circa 0,3 c.Mtr. profondus et paene 1,0 c.Mtr. latus est." [4]).

IV. Bock Gendera, Sundaica 25 ann. (maniaca), „In hac quoque pelvi s. p. non nisi infra lineam terminalem exstat" [5]).

V. Dji in, vir 25 ann. Bantam, Sundaicus. „Pelvis oblique ovata cum ancylosi sacro-iliaca (dextra); s.p. sinistra sub linea terminali existit. [6]).

M. Fritsch arrive à la conclusion, au sujet de l'étendue du sillon préauriculaire dans les bassins nommés ci-dessus que, lorsqu'il est présent, on le trouve toujours au-dessous de la ligne innominée et rarement au-dessus de celle-ci.

M. Fritsch dit encore des autres bassins qu'il examina:

Pelvis feminae Mulattae, „s. p. infra introitum in pelvim conspici potest" [7]).

Pelvis Nigritae (masc. gen.). „s. p. infra lineam terminalem exstat" [8]).

---

[1]) H. Fritsch, *Nonnulla de pelvibus specierum humanarum*, 1873. Habilitationsschrift, Halle.

[2]) p. 10. [3]) p. 11. [4]) p. 12. [5]) p. 13.

[6]) p. 14. [7]) p. 21. [8]) p. 24.

Pelvis Nigritae (masc. gen.) L'auteur ne dit rien du s. p. [1])

Nigritae feminae pelvis „s. p. infra lineam terminalem in oculos incidit". [1])

Un travail ultérieur de M. Fritsch, paru en 1878, sera examiné ci-dessous.

J'ai à dire d'abord un mot du travail de M. Winckel [2]), qui décrit en 1875 11 os iliaques et 7 sacrums, trouvés en 1873 par M. A. B. Meyer dans un ossuaire au voisinage de Kubi, à la pointe méridionale de la Geelvinksbaai. Du nombre étaient deux bassins indubitablement complets, provenant l'un d'un homme, l'autre d'un femme.

Voici ce que dit M. Winckel du sillon préauriculaire: „Bei den meisten der Papua-Darmbeine ist ferner der von Zaaijer beschriebene sulcus praeauricularis, welcher zur Anheftung der ligamenta sacro-iliaco anteriora dient, deutlich ausgesprochen und zwar auch unterhalb der linea innominata."

Un deuxième travail de réelle valeur parut la même année, publié par M. Verneau [3]). Cet auteur a sans doute contribué le plus à se faire méprendre sur mon opinion au sujet de la signification anthropologique du sillon préauriculaire. Je donne ici les passages de son livre qui en font foi. C'est ainsi que nous trouvons en note, pag. 38:

„Pour M. Zaaijer le sillon préauriculaire n'existe pas chez l'Européen: il est particulier aux Javanais [4]). Je l'ai rencontré constamment et dans toutes les races. Sur des Péruviens et des Indiens de l'Amérique du Sud il

---

[1]) *l.c.*, p. 24.

[2]) F. Winckel. *Einiges über die Beckenknochen und die Becken der Papua's* in *Mittheilungen aus dem zoölogischen Museum zu Dresden.* Hft. 1, 1875, S. 85.

[3]) Verneau. *Le bassin dans les sexes et dans les races* Paris 1875.

[4]) J'ai dit simplement: »dass der sulcus praeauricularis am javanischen Frauenbecken häufiger vorkomme und in den meisten Fälle auch stärker entwickelt sei." C'est sans doute tout autre chose que M. Verneau ne me veut faire dire.

présente des dimensions considérables." Et plus loin, page 104:

„M. Zaaijer a signalé, chez les Javanaises, l'existence du sillon préauriculaire. J'ai exprimé plus haut mon opinion au sujet de cette gouttière: j'ai dit ce que je pensais de sa destination J'ai ajouté que ce sillon existait constamment, ses dimensions offrant assurément des différences très grandes suivant les individus et, peut-être, suivant les races. Toujours est-il que chez les races de l'Amérique du Sud, ce sillon acquiert un développement inaccoutumé. Chez la femme Goytacaze (Indienne du Brésil), dont je viens de parler, il acquiert notamment plus d'un centimètre en largeur; il est limité, en bas et en dehors, par une crête, qui se termine inférieurement en tubercule saillant de plusieurs millimètres."

M. Verneau dit page 111 au sujet des bassins américains:

„Après cet examen rapide des bassins américains, nous pouvons tirer les quelques conclusions suivantes:

1°. . . . .

. . . .

10°. Le sillon préauriculaire est presque toujours plus développé que chez les Européens; il acquiert quelquefois des dimensions considérables."

Dans un deuxième travail déjà cité de M. Fritsch[1]) paru en 1878, cet auteur se trompe comme M. Verneau quand il parle de mes idées sur le sillon préauriculaire comme caractère anthropologique. Il dit ce qui suit (p. 19):

„Zaaijer beschreibt eine Fossa (lisez: sulcus) praeauricularis, eine Rinne vor der synchodrosis (!) sacro-iliaca am Becken, als charakteristisch (nämlich für das Malayenbecken). Ohne dem verdienten Forscher zu nahe treten zu wollen, möchte ich doch die Wichtigkeit dieser Furche leugnen, sie findet sich auch anderweit oft und ist beim Malayenbecken nicht immer so gut ausgeprägt um sie als Merkmal benutzen zu können."

[1]) H. Fritsch. *Das Rassenbecken und seine Messung* in *Mittheil. des Vereins für Erdkunde zu Halle.* 1878. p. 1.

M. Ploss [1]) avertit avec pleine raison de ne pas considérer trop vite les particularités anatomiques comme des caractices de race; il me reproche cependant, se fondant sur l'autorité de M. Verneau, de m'en être rendu coupable. Il écrit en effet [2]):

„Man hat auf gewisse an verschiedenen Rassen beobachtete Unterschiede des Beckens ein besonderes Gewicht gelegt, indem die betreffenden Merkmale als „charakteristisch" für die betreffende Rasse bezeichnet wurden. Einige dieser Merkmale zählte C. Martin auf; unter anderen den sulcus praeauricularis, den Zaaijer an den Javaninnen entdeckt hat, die Grösse des Foramen obturatorium u. s. w. . . . Die Berücksichtigung so wohl des allgemeinen Charakters des Beckens als auch einzelner, specifischer Erscheinungen am Becken einzelner Völker oder ganzer Völkergruppen ist ohne Frage von grossem Werth. Allein man muss sich hüten, dergleiche besondere Erscheinungen, die man bei einem Volke wahrnimmt, sofort als Eigenthümlichkeit desselben hinzustellen, denn mehr oder weniger häufig kommen doch auch solche Merkmale bei den allerverschiedensten Völkern vor; es handelt sich schliesslich nur um die (statistich zu beantwortende) Frage über die relative Häufigkeit eines Merkmals und über die grössere oder geringere Ausprägung des allgemeinen Charakters. Am Becken wird es sich wohl in dieser Hinsicht verhalten, wie an den übrigen Theilen des Skelets (z. B. Os Incae, durchbohrtes Olecranon, Platycnemie, etc.); gewisse „Besonderheiten" fand man schliesslich ubiquitär auftretend. So geht es beispielsweise mit dem erwähnten Befunde Zaaijer's." Et pour donner la démonstration de ce qu'il affirme, M. Ploss cite l'assertion erronnée de M. Verneau: „Pour M. Zaaijer le sillon préauriculaire n'existe pas chez l'Européen; il est particulier aux Javanais. Je l'ai rencontré

---

[1]) Ploss. *Zur Verständigung über ein gemeinsames Verfahren zur Beckenmessung* in *Archiv für Anthropologie*. Bd. XV, 1884, p. 259.

[2]) p. 277.

constamment et dans toutes les races. Sur des Péruviens et les Indiens de l'Amérique du Sud il présente des dimensions considérables."

M. Hennig [1]) s'exprime comme suit sur le sillon préauriculaire: „Jene für Muskel- und Fascienursprünge bestimmte Furche am Sacralrande des Darmbeines, welche sich von der Innenfläche des grossen Beckens in das kleine hinabzuziehen pflegt, von holländischen Forschern ebenfalls als Rassenmerkmal aufgefasst, trifft in solcher Beziehung nog weniger als das vorige Merkmal (die durchscheinende Stelle der Darmbeinschaufel) zu. Bei den Orangs wenig oder mässig kenntlich, beim Gorilla stark entwickelt geht diese Furche den Mongoloïden fast ganz ab; tief war sie bei den Aëta; in den übrigen Völkerschaften wechselt ihre Ausbildung regellos."

Je montrerai plus tard, dans la deuxième partie de ce travail, combien l'opinion de M. Hennig sur la signification anatomique du sillon préauriculaire est peu fondée. Je veux simplement faire remarquer ici en passant que M. Hennig accuse les „auteurs hollandais" d'avoir considéré le sillon préauriculaire comme caractère de race, alors que le tort, si tant est qu'il existe, en revient exclusivement à moi.

En 1886, M. Turner [2]) donna une description des crânes humains et des autres pièces osseuses récoltées durant le voyage du navire „the Challenger" en 1873—1876.

Voici ce qu'il écrit: „In my series of pelves I find it (the sulcus praeauricularis) present in the most of the Australian pelves, in the Busch, Sandwich Islanders, one of the New Zealanders, a Negroo, Hindoo, Chinese, Malay, in the Andaman Islanders, Guanche, Laplanders and Esquimaux. I have

---

[1]) Hennig, *Das Rassenbecken* in *Archiv für Anthropologie.* Bd. XVI, 1886, p. 187.

[2]) Turner, *Report on the Human Crania and other Bones of the skeletons collected during the voyage of H. M. S. Challenger, in the Years* 1873—76 in: *The Voyage of H. M. S. Challenger. Zoölogy*, vol. XVI, 1886, p. 54.

also seen it in several European pelves, without being able, however, to state its relative frequency. It varied in its distinctness in different pelves; sometimes it was a narrow, shallow, vertical groove, so faint as to be just recognised, in others the groove had considerable depth; sometimes it was widened out into a shallow fossa, but in others the fossa was deep. The most distinct examples of the sulcus praeauricularis were found in the pelves of the Sandwich Island women. From its presence in so many races it cannot be regarded as a special character of any particular race."

Je n'ai pas eu connaissance d'autres notes anthropologiques sur le sillon préauriculaire. Les traités d'anatomie n'en ont pas, que je sache, fait mention jusqu'à présent. M. Testut cependant [1]) fait exception à cette règle. Il écrit dans son excellent livre: „Le bord inférieur de la facette auriculaire de l'os coxal est longé par un sillon qui se dirige parallèlement à son bord et se termine en arrière au-dessous de l'épine iliaque postérieure et inférieure. Le professeur Zaaijer, qui a donné à cette gouttière le nom de sillon préauriculaire, la considère à tort comme particulière aux Javanais."

Il est clair que M. Testut a écrit ce qui précède d'après l'autorité de M. Verneau, et qu'il a en conséquence versé dans la même erreur.

Je puis à présent ajouter encore aux données qui précèdent de nouvelles observations qui me sont propres; et je parlerai en premier lieu de celles que j'eus l'occasion de faire, après la publication de mon premier travail, dans la collection anatomique de l'Université de Leyde. Je pus examiner notamment les bassins suivants:

1. Chinois, né à Emoi, Coll. Swaving [2]) (Catal.

---

[1]) Testut. *Traité d'anatomie humaine.* Tome I, Paris 1889, p. 265.

[2]) C'est au Dr. Swaving, cet homme de si grand mérite, décédé depuis, que nous devons la plus grande partie de nos trésors anthropologiques provenant de l'Archipel malais.

r. r. r. 1). Il présente à gauche un sillon préauriculaire peu profond et d'une assez grande largeur, au-dessous de la ligne innominée. A droite je ne pus observer de sillon, mais l'examen était rendu difficile par la masse desséchée des ligaments.

2. Chinoise métisse, née à Batavia, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 2). Des deux côtés, au-dessous de la ligne innominée, s'étend un sillon assez large et peu profond limité au bord de la grande échancrure sciatique par une épine [1]). Du côté droit le sillon s'observe aussi, quoique très-faiblement accusé, au-dessus de la ligne innominée.

3. Chinoise métisse, née à Batavia, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 3); s. p. présent des deux côtés au-dessous de la ligne innominée; plus évident à gauche.

4. Homme né à Atjeh, Sumatra, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 4); s. p. également visible des deux côtés au-dessous de la ligne innominée; plus large à droite qu' à gauche.

5. Homme né dans l'île Linga, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 5); le s. p. fait défaut.

6. Femme née dans l'île Engano, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 6)); s. p. présent des deux côtés au-dessous de la ligne innominée. Il est plus large à gauche et limité par une épine, comme sur le bassin de la Chinoise métisse n°. 2

7. Femme née à Bekassie, près Batavia, Java, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 23); le s. p. fait défaut.

8. Homme né à Tangerang, près Bantam, Java, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 25); le s. p. fait défaut.

9. Femme née dans l'île Bali, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 30); le s. p. fait défaut; les ligaments s'opposent à un examen complet.

10. Femme née à Beleling, île Bali, Coll. Swa-

---

[1]) M. Verneau observa un fait analogue sur le bassin d'une Indienne de Brésil. On le trouve également sur le bassin, dont l'os iliaque droit est représenté fig. 1.

ving (Catal. r. r. r. 31); le s. p. est visible à droite au-dessous de la ligne innominée.

11. Femma de l'île de Timor, Koupang, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 32); le s. p. se rencontre des deux côtés avec une largeur assez considérable au-dessous de la ligne innominée.

12. Homme né à Gorontalo, île de Célèbes, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 33); le s. p. fait défaut. L'examen est incomplet à cause des ligaments.

13. Homme né à Boni, île de Célèbes, Coll. Swaving (Catal. r. r. r. 34); le s. p. fait défaut.

14. Le bassin d'une femme de l'île Nias, à l'ouest de Sumatra, provenant de la collection de l'Hôpital de l'Université de Leyde, montre évidemment le s. p. des deux côtés, au-dessous de la ligne innominée [1]).

Huit des bassins examinés, appartenant à des races différentes (Chinois, deux Chinoises métisses de Java, homme d'Atjeh, femme d'Engano, femme de Bali, Beleling, femme de Timor, femme de Nias), montrèrent donc un sillon préauriculaire à divers degrés de développement; les six autres (homme de Linga, femme de Bekassie, Java, homme de Tangerang, Java, femme de Bali, deux hommes de Célèbes) n'en présentèrent pas trace.

J'examinai encore les squelettes suivants:

1. Chinois né à Hongkong, Coll. Swaving (Catal. s. s. s. 1); le s. p. fait défaut des deux côtés.

---

[1]) Mon collègue et ami, M. le Prof. Hector Treub, directeur de la clinique obstétricale et gynécologique de Leyde, a eu la bonté de me confier ce bassin. Il a déjà été décrit dans ma thèse inaugurale: Beschrijving van twee vrouwenbekkens uit den Oost-Indischen Archipel. Leiden, 1862. p. 3. Pl. II. Le bassin fut donné jadis par le Dr. Swaving au professeur de Chirurgie et d'Obstétrique de Leyde, M. Broers.

2. Chinois métis de Java (Catal. s. s. s. 2); le s. p. est évident des deux côtés au-dessous de la ligne innominée.

3. Japonais (Catal. s. s. s 3); s. p. évident des deux côtés au-dessous de la ligne innominée.

4. Clingalais de Madras (Catal. s. s. s. 4); trace de s. p. des deux côtés au-dessous de la ligne innominée.

5. Homme de Lampong, Sumatra, Coll. Swaving (Catal. s. s. s. 5); le s. p. fait défaut des deux côtés; l'éxamen est rendu moins complet par la présence des ligaments.

6. Homme de Java (Catal. s. s. s. 6); s. p. évident des deux côtés au-dessous de la ligne innominée.

7. Femme de Tangerang, Java, Coll. Swaving (Catal. s. s s. 7); s. p. présent des deux côtés au-dessous de la ligne innominée.

8. Femme de Samarang, Java, Coll. Swaving (Catal. s. s. s. 8); le s. p. fait défaut des deux côtés; l'examen est quelque peu incomplet par suite de la masse des ligaments desséchés.

9. Homme de Borneo, Dajak (Catal. s. s. s. 9); s. p. évident des deux côtés au-dessous de la ligne innominée.

10. Homme de Pontianak, Bornéo, Coll. Swaving (Catal. s. s. s. 10). Trace de s. p. des deux côtés au-dessous de la ligne innominée.

11. Nègre d'Abbassieh[1]), Afrique, Coll. Swaving (Catal. s. s. s. 11); le s. p. fait défaut.

12. Nègre de provenance inconnue, Coll. Swaving (Catal. s. s. s. 12); le s p. fait défaut.

L'examen des bassins 11 et 12 ne fut pas complet à cause de la masse des ligaments.

Le sillon préauriculaire était donc présent sur 7 des bassins examinés, avec des

---

[1]) Près du Caire, entre Zagazig et le lac Timsah.

degrés de développement divers (Chinois métis de Java, Japonais, Clingalais de Madras, Javanais, Javanaise de Tangerang, Dajak de Borneo, homme de Pontianak, Borneo); il manquait d'autre part sur les cinq squelettes restants (Chinois, homme de Lampong, Sumatra, Javanaise de Samarang, Nègre d'Abbassieh, Afrique, Nègre de provenance inconnue.)

J'ai examiné ensuite les ilions de 21 squelettes macérés d'adultes. Un seul de ces squelettes appartenait à une femme; tous proviennent de l'amphithéâtre de Leyde.

Il n'y a qu' *un seul cas* (squelette I d'un homme de 45 ans. Inv. N°. a. a. a. 9) dans lequel je trouvai des deux côtés le sillon préauriculaire, le long du bord antérieur tout-entier de la surfaee auriculaire. Sur un autre squelette le sillon préauriculaire était présent au même endroit, du côté gauche, et franchement marqué au-dessous de la ligne innominée du côté droit, où l'on pouvait le poursuivre jusqu' à un centimètre au-dessus de cette ligne. Le troisième squelette au contraire présentait un sillon évident le long du bord antérieur tout-entier de la surface auriculaire droite; du côté gauche il n'était visible qu'au-dessous de la ligne innominée. Le quatrième squelette enfin montrait précisément l'inverse.

Le sillon préauriculaire était bien accusé sur cinq des squelettes, et parmi ceux-ci sur le squelette de femme. On le trouvait des deux côtés au-dessous de la ligne innominée. Cinq autres squelettes ne présentaient des deux côtés qu' une trace du sillon au-dessous de la même ligne; sur trois autres il faisait, des deux côtés, complètement défaut.

L'un des squelettes possédait un sillon très accusé à droite, au-dessous de la ligne innominée, tandis qu' à gauche, au même endroit, une simple trace en était visible. Deux des squelettes présentaient une trace de sillon à droite, et une

surface lisse à gauche. Un autre squelette en montrait du côté gauche également une trace, qui du côté droit faisait défaut.

Nous conclurons donc de ceci que le sillon préauriculaire ne fait complètement défaut, des deux côtés, que sur trois des 21 squelettes examinés, appartenant à des Européens[1]) *adultes. Il est développé sur les 18 autres squelettes à des degrés divers.*

L'examen de 33 os iliaques isolés (28 d'homme et 5 de femme) de provenance inconnue donna encore les résultats suivants:

Six ilions d'homme (dont trois du côté droit et trois du côté gauche) montrèrent un sillon préauriculaire évident au-dessous de la ligne innominée; 17 autres (5 d. et 12 g.) en présentèrent une trace au même endroit; 5 derniers os iliaques enfin (1 d. et 4 g.) n'avaient pas de sillon.

Trois des ilions de femme (1 d. et 2 g.) présentèrent un sillon préauriculaire bien marqué au-dessous de la ligne innominée; deux autres, provenant de la même femme, n'offraient qu'une simple trace de ce sillon.

On voit donc que le sillon préauriculaire n'a fait défaut que sur cinq des trente trois os iliaques adultes examinés.

Pendant que je m'occupais de l'étude de ces squelettes, il me vint par hasard entre les mains deux ilions d'enfant. L'un, provenant du côté droit, appartenait à un enfant probablement âgé de trois ans; le second était gauche et l'enfant dont il provenait avait dû avoir six ans d'âge. Les deux os me montrèrent un sillon préauriculaire bien net le long du bord antérieur tout entier de la surface auriculaire.

---

[1]) Les squelettes appartenaient en partie à des individus complètement inconnus (noyés, suicidés, vagabonds, etc.)

Nous voyons donc apparaître le sillon préauriculaire sous différentes formes; d'ordinaire comme une dépression plus ou moins profonde au-dessous de la ligne innominée. Il y atteint, dans certains cas, des dimensions très-respectables, comme par exemple dans un des bassins de femmes javanaises que j'ai décrits antérieurement [1]) (Pl. VI, fig. 1). Ici il atteint une largeur de 1,5 cm., il présente une surface très-rugueuse. Il est encore très-important sur le bassin de la femme sondanaise de Bantam, Java, décrit par M. Fritsch [2]). Les cas où le sillon s'étend le long de tout le bord antérieur de la surface auriculaire (Pl. VI, fig. II) sont beaucoup plus rares. Il peut aussi faire complètement défaut.

Les résultats d'autres observateurs rapportés ici, ainsi que mes recherches propres anciennes et nouvelles montrent ensuite que le sillon préauriculaire se présente dans les différents peuples et races avec un développement plus ou moins considérable, et qu'il peut encore être complètement absent.

Je crois donc pouvoir établir les conclusions qui suivent:

1°. Le sillon préauriculaire se rencontre à des degrés divers de développement et de fréquence dans toutes les races;

2°. Ce sillon n'a aucune valeur comme caractère de race.

---

[1]) *Untersuchungen* p. 16.

[2]) Fritsch. *Nonnulla de pelvibus specierum humanarum* p. 12.

II. Signification anatomique du sillon préauriculaire.

Dans mon travail cité plus haut [1]), j'ai montré comment des recherches spéciales me firent admettre que le sillon préauriculaire sert à l'insertion du ligament sacro-iliaque antérieur. Cette opinion semble être partagée par MM. van West et Winckel. M.M. Fritsch, Turner et d'autres auteurs ne s'expriment pas à ce sujet.

M. Verneau, au contraire, émet un avis complètement différent, différent déjà en ce qui concerne l'endroit où l'on rencontre le sillon. Je l'ai, pour ma part, toujours trouvé sur l'ilion, en avant de la surface auriculaire; M. Verneau la rencontre aussi en partie sur le sacrum [2]): „Cette gouttière peut être creusée moitié sur le sacrum moitié sur l'os iliaque, de façon à se trouver directement en avant de l'articulation sacro-iliaque, au lieu d'être en-dehors." Et plus loin:

„Le professeur Zaaijer a donné à cette gouttière le nom de sillon préauriculaire. J'adopterai le mot, mais je ne puis admettre que ce sillon soit exclusivement destiné à l'insertion du ligament sacro-iliaque antérieur. On sait bien, en effet, que le ligament antérieur est constitué uniquement par le périoste un peu épaissi, et on s'explique difficilement les dimensions considérables que le sillon acquiert chez des sujets peu robustes. Le fait est que le ligament antérieur tapisse le fond du sillon préauriculaire et que quelques-unes de ses fibres s'y insèrent dans de petites dépressions qu'on y observe parfois. La majeure partie du ligament va s'insérer à la lévre externe de la gouttière."

M. Verneau combat donc ici la manière dont j'envisage la signification anatomique du sillon préauriculaire; mais il va plus loin [3]): „Le sillon préauriculaire me paraît correspondre au trajet de l'artère hypogastrique. Je crois pouvoir

---

[1]) p. 28. [3]) *l. c.* p. 38. [2]) p. 38.

affirmer la constance de ce sillon en faisant toutefois cette réserve qu'il peut être réduit à une simple dépression." A un autre endroit de son livre [1]) il parle de deux sillons secondaires: „J'ai décrit assez longuement le sillon préauriculaire. Il peut être subdivisé en deux sillons secondaires, correspondant probablement l'un à l'artère, l'autre à la veine hypogastrique."

M. Hennig émet une opinion toute différente. Il donne en 1880 [2]) le sillon préauriculaire comme „une gouttière destinée à l'insertion de muscles", et plus tard, en 1886 [3]), ainsi qu'il a déjà été rapporté plus haut, il en parle comme de „ce sillon destiné à l'insertion de muscles et d'aponévroses."

Deux opinions se dressent donc en face de la mienne. La première, celle de M. Verneau, qui considère le sillon comme provoqué par les vaisseaux hypogastriques, et qui le fait passer en partie sur le sacrum; la deuxième opinion, celle de M Hennig, considère le sillon préauriculaire comme destiné à l'insertion de muscles et d'aponévroses.

Il ne sera pas difficile de démontrer que ces deux opinions sont erronées.

Tout d'abord cependant, je désire exposer les résultats des recherches que j'ai entreprises à l'occasion des assertions de M. Verneau, au sujet de la présence du sillon à la face antérieure du sacrum.

Certains sacrums, surtout ceux qui comprennent d'un seul côté ou bien des deux la dernière vertèbre lombaire, montrent à la face antérieure des dépressions peu profondes, mais assez larges, qui dessinent d'une manière très-évidente le trajet des derniers nerfs lombaires vers le plexus sciatique. Ces dépressions pourront donc être négligées ici.

Mais il fut bientôt clair que bien réellement, quoique d'une

---

[3]) p. 49.

[1]) Hennig, *Das kindliche Becken* in *Arch. für Anatomie und Physiologie*, Anat. Abth. 1880, p. 76.

[2]) Hennig, *Das Rassenbecken*, p. 187.

manière assez rare, on trouve aussi, le long du bord inférieur et antérieur de la surface auriculaire du sacrum, un sillon qui présente une ressemblance frappante avec la gouttière de l'ilion.

Examinant encore les 14 bassins de races diverses dont il a été question dans la première partie de ce travail, je trouvai que sur huit d'entre eux toute trace de sillon, au voisinage de la surface articulaire du sacrum, faisait défaut.

Les autres bassins me montrèrent ce qui suit:

1. Chinoise métisse (Catal. r. r. r. 2). De part et d'autre, mais moins nettement du côté gauche, en avant de la surface auriculaire du sacrum, une dépression peu profonde qui se prolonge de bas en haut jusqu'au bord inférieur du premier trou sacré antérieur.

2. Homme d'Atjeh (Catal. r. r. r. 4). A gauche une dépression, au-dessous de la surface auriculaire. Elle peut être poursuivie vers le haut jusqu'au centre du deuxième trou sacré antérieur.

3. Femme d'Engano (Catal. r. r. r. 6). Une dépression analogue à droite, s'étendant jusqu'au bord supérieur du troisième trou sacré antérieur.

4. Femme de Beleling, Bali. (Catal. r. r. r. 31). Du côté droit, une dépression peu profonde jusqu'au bord inférieur du premier trou sacré antérieur.

5. Femme de Koupang, Timor. (Catal. r. r. r 32). Des deux côtés, une dépression située au-dessous et en avant de la surface auriculaire, et s'étendant jusqu'au bord inférieur du premier trou sacré antérieur.

6. Femme de Nias. Des deux côtés, au-dessous de la partie inférieure de la surface auriculaire, une dépression large de plus d'un centimètre, qui se poursuit en devenant de plus en plus étroite jusqu'au bord inférieur du deuxième trou sacré antérieur.

L'examen du sacrum des douze squelettes de race diverse dont j'ai parlé plus haut ne donna que des résultats négatifs; la masse desséchée des ligaments rendait incomplète l'étude de certains de ces squelettes.

J'examinai encore 37 sacrums isolés (dont 3 de femme), provenant de l'amphithéâtre.

Vingt-deux de ces exemplaires ne montrèrent trace de dépression, ni au-dessous ni en avant de la surface auriculaire.

Treize sacrums (dont deux de femme) me montrèrent sous la partie inférieure de la surface articulaire une dépression plus ou moins évidente; quatre autres (tous d'homme) n'offraient de dépression que du côté gauche.

Un seul sacrum masculin présentait du côté gauche, au-dessous de la surface auriculaire, une dépression assez-profonde, qui devenait plus étroite en avant. En arrière, elle se prolongeait en s'élargissant jusqu' à 1 cm. environ, et atteignait le centre du deuxième trou sacré antérieur.

Un seul des sacrums de femme enfin me montra de part et d'autre, au-dessous de la surface auriculaire, une gouttière profonde, large de plus d'un centimètre, que je pus poursuivre le long du bord antérieur de cette surface. Elle devenait, dans son trajet, de moins et moins profonde et large, et se terminait à droite au bord supérieur, à gauche au bord inférieur du premier trou sacré antérieur. Le fond de la dépression était rugueux de place en place (Pl. VII).

C'est donc au-dessous de la surface auriculaire que, sur le sacrum, le sillon apparaît avec le plus de netteté et de fréquence Dans les cas où il s'étend jusqu'en avant de la surarticulaire, il est en cet endroit généralement étroit et peu profond On le rencontre dans tous les cas bien plus rarement que le sillon préauriculaire de l'ilion. Je pus cependant l'observer dans certaines circonstances isolées sur le sacrum, alors qu'il faisait défaut sur les os iliaques. Je propose de le nommer *sillon infra(pré)auriculaire du sacrum* [*sulcus infra(prae)-auricularis ossis sacri*].

Est-il possible que ces deux gouttières [1]) se trouvent, com-

[1]) M. Verneau paraît les considérer comme des portions d'une gouttière unique, ce qui est sans aucun donte une erreur.

me le veut M. Verneau, en rapport avec le trajet des vaisseaux hypogastriques? C'est, à mon avis, une réponse négative qu'il faut donner à cette question et voici pourquoi.

Tout d'abord, les cas où le sillon préauriculaire peut être poursuivi le long du bord antérieur tout entier de la surface articulaire démontrent qu'il faut attribuer à cette gouttière une autre signification que celle admise par M. Verneau. Si on l'examine en effet de haut en bas, on trouve qu'elle présente dans toute son étendue le même aspect et les mêmes caractères. Or, on pourrait difficilement se représenter qu'au-dessus de la ligne innominée, où le sillon préauriculaire ne peut absolument pas se trouver en rapport avec les vaisseaux hypogastriques, puisque ces vaisseaux y font défaut, ce sillon aurait un autre usage qu' au-dessous de cette ligne.

Il y a plus. Le muscle psoas dépasse d'ordinaire, vers l'intérieur, la ligne innominée de son bord médian, ce qui écarte les vaisseaux hypogastriques de la paroi du bassin.

On peut enfin s'assurer sans peine que très-souvent il persiste un certain espace entre l'artère hypogastrique et la paroi du bassin; et dans des cas de cette nature il ne peut pas évidemment être question d'un rapport quelconque entre le sillon préauriculaire et cette artère. Quant à la veine hypogastrique, je la trouvai toujours plus en arrière et en dedans, à la surface antérieure du sacrum, et si éloignée de l'articulation sacro-iliaque, que certainement elle ne pourrait jamais provoquer une dépression dans le voisinage immédiat de cette articulation. Si l'on considère en outre que les nerfs formant le plexus sciatique sont situés entre la veine hypogastrique et la surface antérieure du sacrum; que le dernier nerf lombaire enfin produit parfois, comme je l'ai déjà dit ci-dessus, une dépression très-légère de direction toute différente de celle du sillon préauriculaire, la possibilité que la veine hypogastrique creuserait une gouttière le long du bord antérieur de la surface auriculaire du sacrum me paraît définitivement écartée.

Il faut donc considérer comme inexacte l'opinion de M. Verneau, qui n'a évidemment pas examiné lui-même l'état des choses.

L'avis de M. Hennig ne résulte pas davantage d'études personnelles. Il se fait une idée fausse des caractères du sillon préauriculaire. Il parle en effet d'une „gouttière, qui d'habitude passe, vers le bas, de la face interne du grand bassin sur le petit [1]). Or, c'est précisément l'inverse qui a lieu; le sillon ne se trouve en général que sur le petit bassin et se prolonge, dans des cas isolés et rares, vers le haut dans le grand bassin. Plus rarement encore il s'étend le long de tout le bord antérieur de la surface auriculaire.

L'assertion de M. Hennig, suivant laquelle le sillon servirait à l'insertion de muscles, ne saurait se défendre. Un seul muscle, l'obturateur interne, pourrait entrer ici en ligne de compte. Or, jamais je n'ai pu trouver l'origine de ce muscle si près de la surface articulaire de l'os iliaque qu'il aurait pu donner naissance au sillon préauriculaire; et c'est surtout dans la portion inférieure, où le sillon est d'ordinaire le plus franchement accusé, que cette impossibilité est évidente.

Le sillon préauriculaire ne peut avoir en conséquence, dans le petit bassin, la signification que lui attribue M Hennig.

Il est d'ailleurs déjà improbable à priori que le sillon aurait, au-dessus de la ligne innominée (où on le rencontre rarement) une fonction qu'il perdrait au-dessous de cette ligne. Ici encore il ne pourrait être question que d'un seul muscle, à savoir l'iliaque interne. Mais les nombreuses préparations de muscles que j'eus l'occasion d'examiner ne m'ont jamais montré une adhésion plus parfaite des faisceaux musculaires en avant de la surface articulaire de l'ilion, ni une pénétration plus profonde à ce niveau qu'à d'autres endroits de la fosse iliaque.

Déjà la présence du sillon préauriculaire le long de tout le

---

[1]) *Das Rassenbecken*, p. 161.

bord antérieur de la surface articulaire de l'ilion chez de jeunes enfants, fait que je signalai dans la première partie de ce travail, suffit, me semble-t-il, à réfuter l'opinion de M. Hennig. Nous savons en effet que des traces d'insertions musculaires si prononcées n'apparaissent que bien plus tard, quand les muscles sont plus développés. Les ilions d'enfant dont il s'agit ne présentaient pas apparence de ligne demi-circulaire antérieure (l. glutaea anterior), qui cependant est évidente même chez des individus à muscles peu développés.

M. Hennig parle encore d'insertions d'aponévroses, auxquelles le sillon préauriculaire devrait servir. Je n'ai pas réussi à découvrir la nature des aponévroses que cet auteur avait en vue. Je n'en connais pas tout au moins au voisinage du sillon.

J'espère que les considérations qui précèdent suffiront à réfuter les idées de M. Hennig.

Je me suis efforcé, durant de longues années, d'étudier à l'amphithéâtre de Leyde les rapports du ligament sacro-iliaque antérieur. J'ai, à l'occasion, examiné aussi à ce point de vue les pièces présentant le sillon préauriculaire, et toujours je me suis trouvé affermi dans ma conviction première, que ce sillon doit servir à l'insertion de ce ligament. La description que donne M. Verneau de ces rapports est en général très-exacte; et on s'étonne donc d'autant plus que cet auteur attribue au sillon préauriculaire une signification différente de celle qu'on déduirait des faits qu'il rapporte. On sait qu'à son avis la gouttière est en relation avec les vaisseaux hypogastriques, et je crois avoir démontré qu'il ne peut en être aussi.

Certains des bassins desséchés me permirent d'observer une fois de plus que la masse du ligament en question est très-solidement unie au fond du sillon préauriculaire.

J'ai jusqu'ici parlé seulement du sillon préauriculaire de l'ilion. Mais on ne peut douter que lorsqu'une gouttière ana-

logue existe sur le sacrum, elle y aura une signification identique.

Il résulte des faits qui précédent que le sillon en question présente son maximum de développement, sur le sacrum comme sur l'ilion, dans sa portion inférieure, savoir sous la ligne innominée de l'ilion et sous la surface articulaire inférieure du sacrum. Sur ce dernier os toutefois on ne peut le poursuivre que rarement le long du bord antérieur de la surface auriculaire.

Je crois avoir trouvé dans les considérations suivantes l'explication de ce fait. A la face postérieure de l'articulation ilio-sacrée, l'espace entre l'ilion et le sacrum se trouve presqu'entièrement rempli par le ligament interosseux. C'est, je crois, Meyer qui le premier montra la grande signification mécanique de ce ligament. Il en donne la description suivante [1]): „der obere (hintere) Theil (tuberositas) des Darmbeines dagegen überragt die obere (hintere) Fläche des Kreuzbeines sehr beträchtlich, und von der ganzen inneren Fläche dieses Theiles gehen gewaltige Bandmassen (*ligamenta vaga posteriora*) auf die Rückenfläche des Kreuzbeines". Ce ligament supporte le sacrum, qui à son tour est chargé de tout le poids du tronc Il donne, du côté supérieur et postérieur de l'articulation ilio-sacrée, une solidité suffisante à celle-ci. La même chose peut maintenant s'appliquer à la masse des ligaments attachée à la portion antérieure et inférieure de l'articulation, au fond du sillon préauriculaire de l'ilion ou du sacrum. Ces ligaments pourront augmenter au besoin la solidité de l'articulation.

Pourquoi le sillon préauriculaire, surtout celui de l'os iliaque, est-il tantôt très-développé, tantôt absent? pourquoi s'étend-il

---

[1]) Meyer. *Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes*, Leipzig 1873, p. 285 et *Lehrbuch der Anatomie des Menschen*, 3 Aufl. Leipzig, 1873, p 128. Voir aussi la monographie classique de Luschka, *Die Halbgelenke des menschlichen Körpers*, Berlin, 1858, p. 138. Pl. V. fig. 1 et 2, *g*.

parfois tout le long du bord antérieur de la surface articulaire, d'autres fois rien que sous la ligne innominée? Ces questions sont à présent insolubles. Il faudrait, pour y répondre, une quantité de données que l'anatomiste n'a peut être jamais à sa disposition. La profession peut, me paraît-il, avoir une grande influence, et je considère comme très-probable que l'habitude de porter de lourds fardeaux jouera ici un rôle important.

M. Verneau a fait valoir entre autres contre mon opinion que le sillon préauriculaire peut être très-développé chez „des sujets peu robustes''. Nous en trouvons un exemple frappant fig. 1 Pl. VI, et dans le bassin décrit par M. Fritsch, dont j'ai déjà parlé. Ces deux bassins appartenaient à des femmes javanaises [1]). Mes recherches précédentes ont déjà montré que le bassin de ces femmes a d'ordinaire une structure fine et élégante [2]). Le fait est donc indiscutable, mais il ne justifie pas encore la conclusion établie par M. Verneau et que j'ai déjà pu réfuter. Peut-être des grossesses passées ont elle souvent une signification. Mais les matériaux dont nous disposons ne permettent pas non plus de résoudre ce problème. Je crois cependant devoir appeler en passant l'attention sur ce fait.

Je pense donc être autorisé à résumer comme suit mes conclusions au sujet de la signification anatomique du sillon préauriculaire:

Le sillon préauriculaire de l'ilion sert, aussi bien que celui du sacrum, à l'insertion du ligament sacro-iliaque antérieur.

Leyde, Décembre 1892.

---

[1]) M. Verneau décrit lui aussi un sillon préauriculaire très-large et profond sur le bassin d'une Indienne du Brésil.

[2]) *Untersuchungen*, p. 38

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE VI.

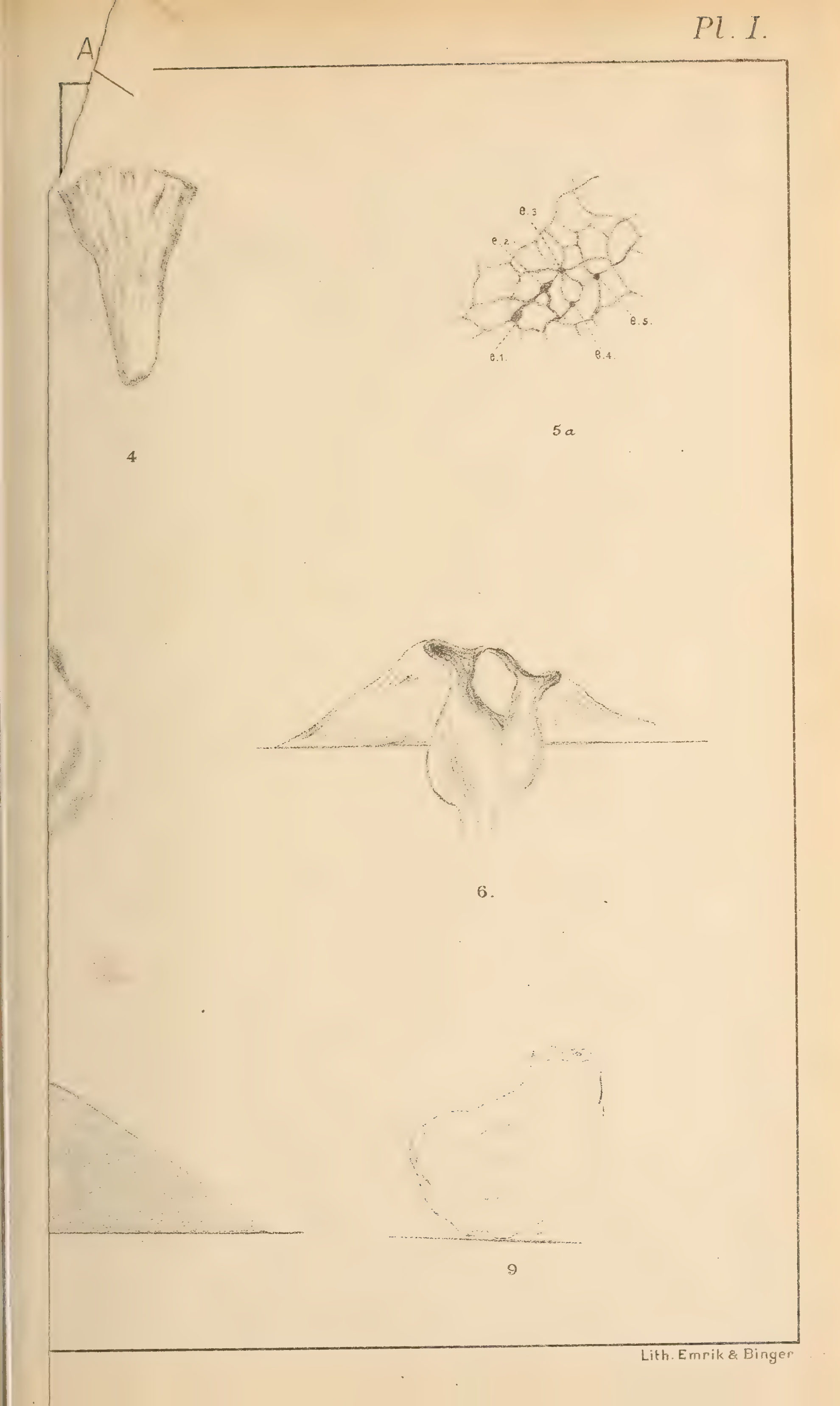
Fig. 1. Ilion droit d'une femme javanaise adulte avec sillon préauriculaire très développé (½ de la grandeur naturelle).

Fig. 2. Ilion gauche d'un homme de 45 ans avec sillon préauriculaire le long du bord antérieur tout-entier de la surface articulaire (½ de la grandeur naturelle).

PLANCHE VII.

Sacrum de femme avec sillon préauriculaire évident des deux côtés (grandeur naturelle).

Les figures ont été dessinées par M. C. Miga, Concierge de l'Institut anatomique de Leyde.

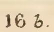


Lith. Emrik & Binger

H. Behrens del.
Lith. Emrik & Binger

12.

13.

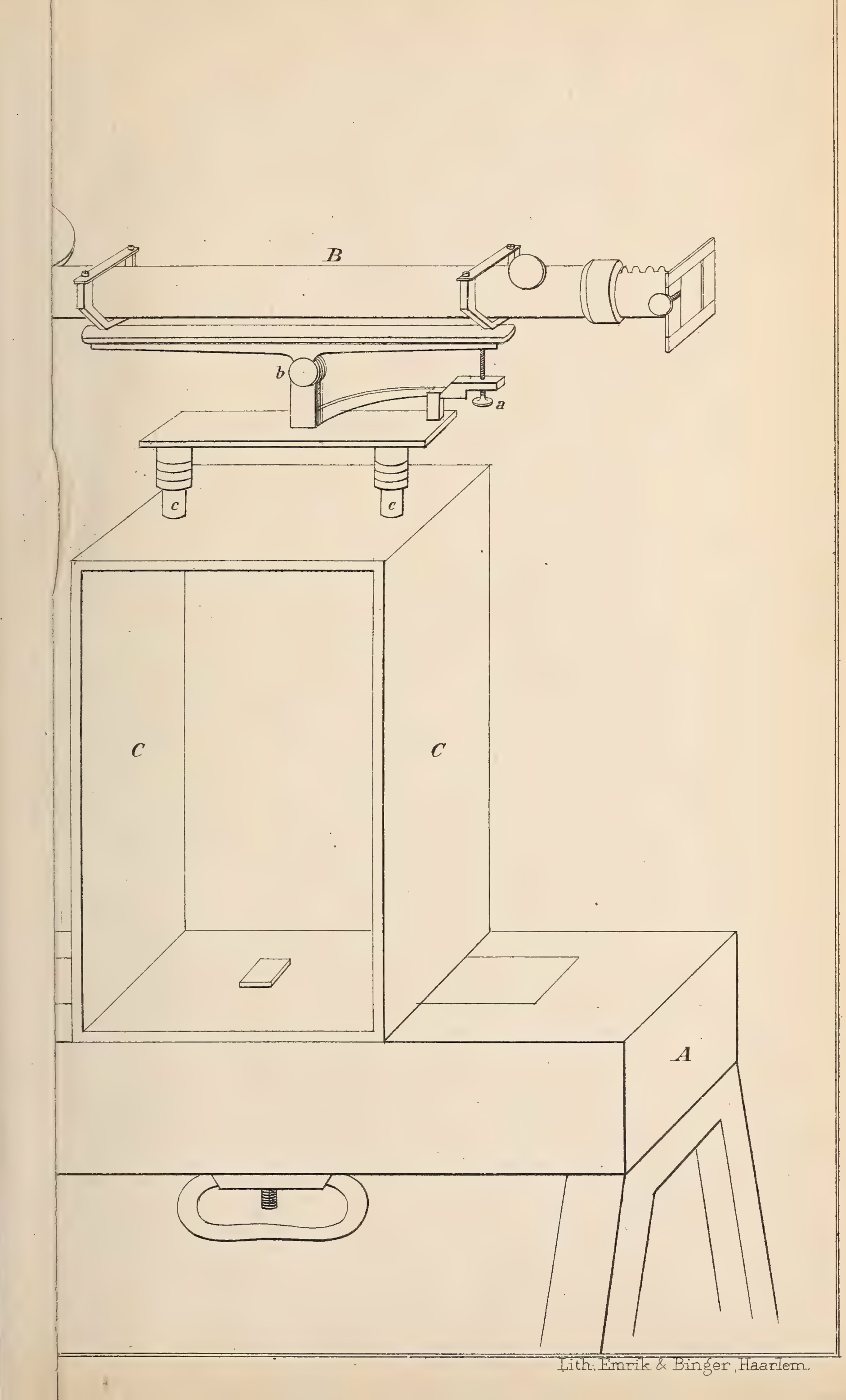


16 b.

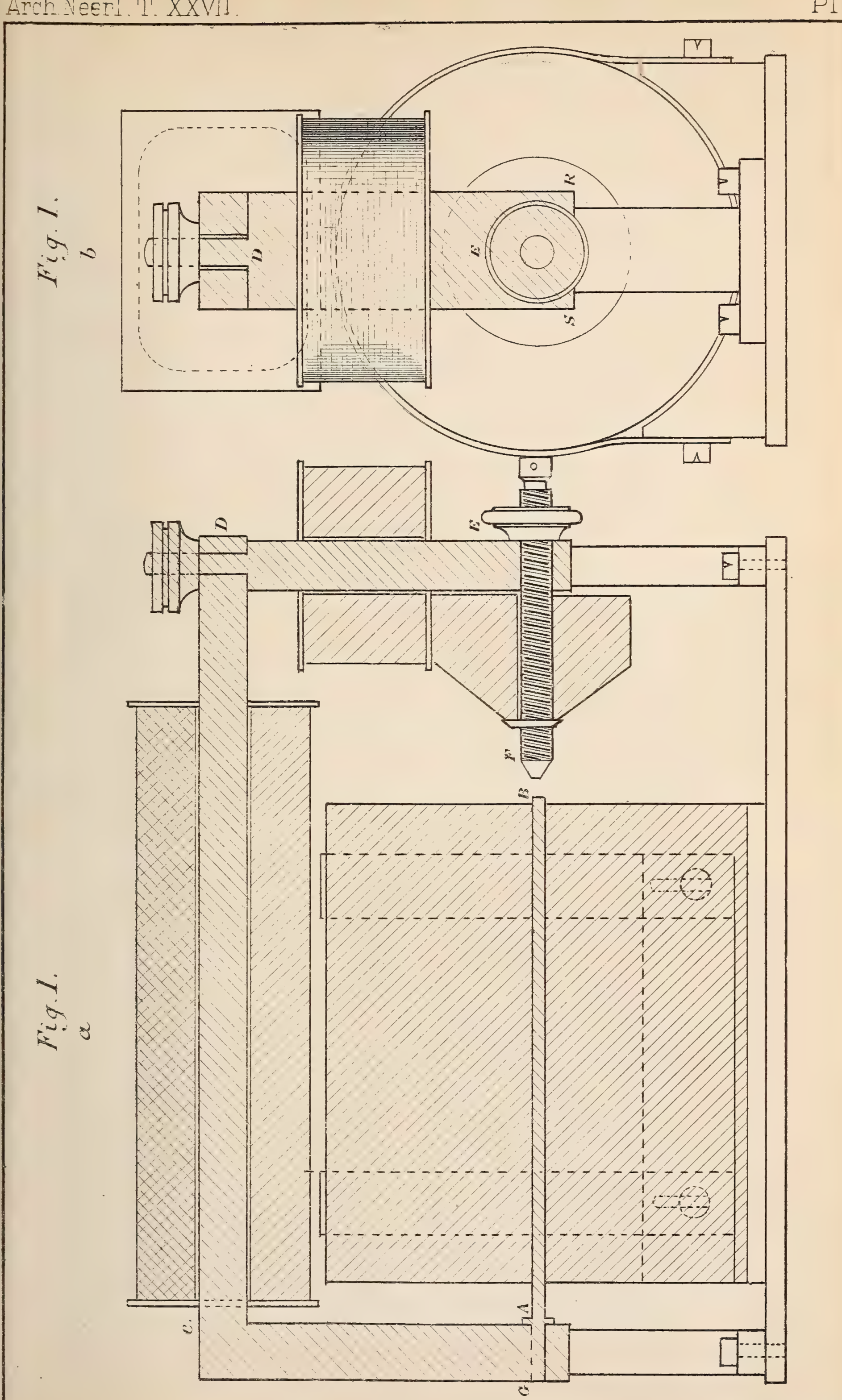
17.

Lith. Emrik & Binger.

H Behrens del



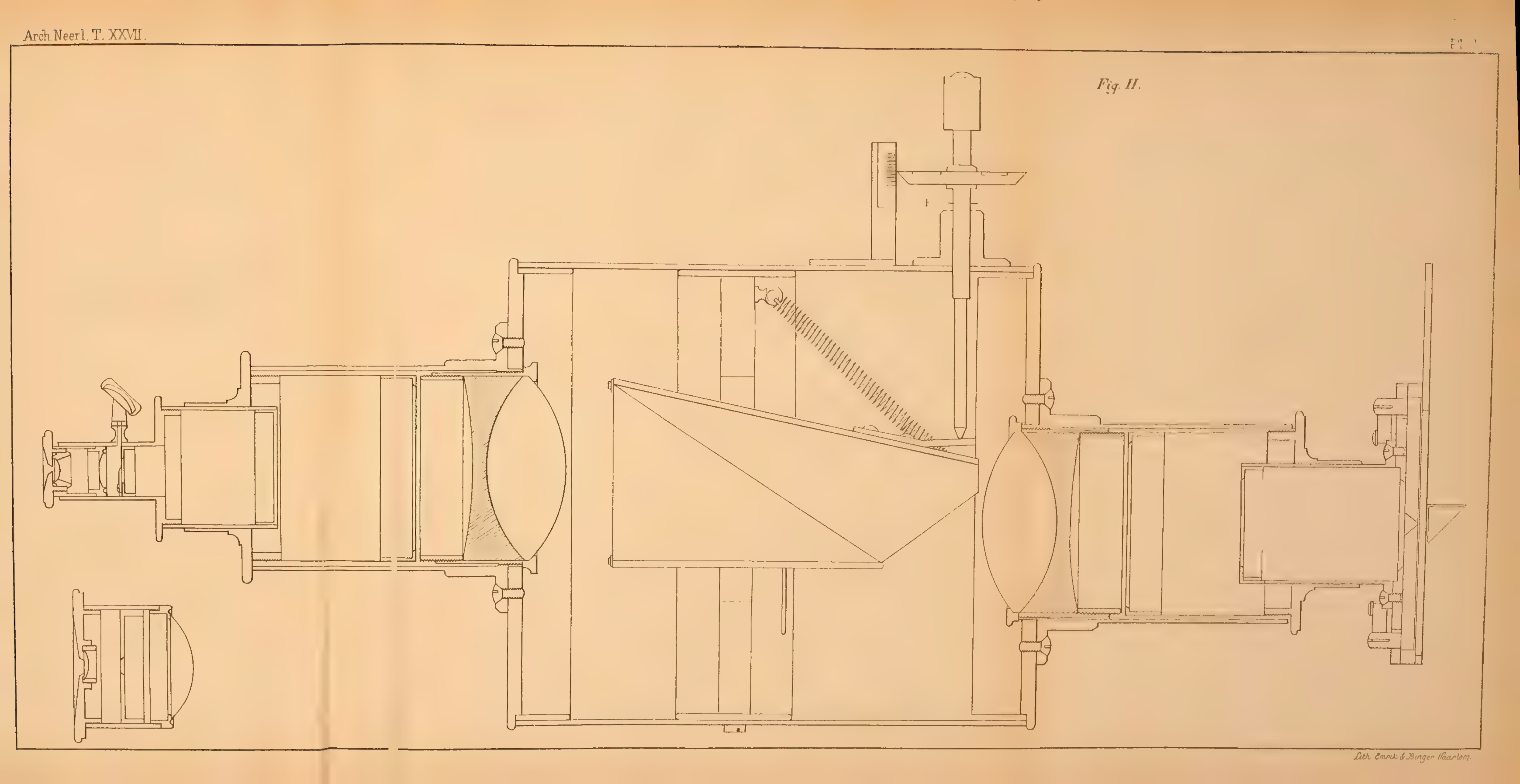
Lith. Emrik & Binger, Haarlem.



Lith. Emrik & Binger.

Pl. V.

Lith. Emrik & Binger Haarlem.



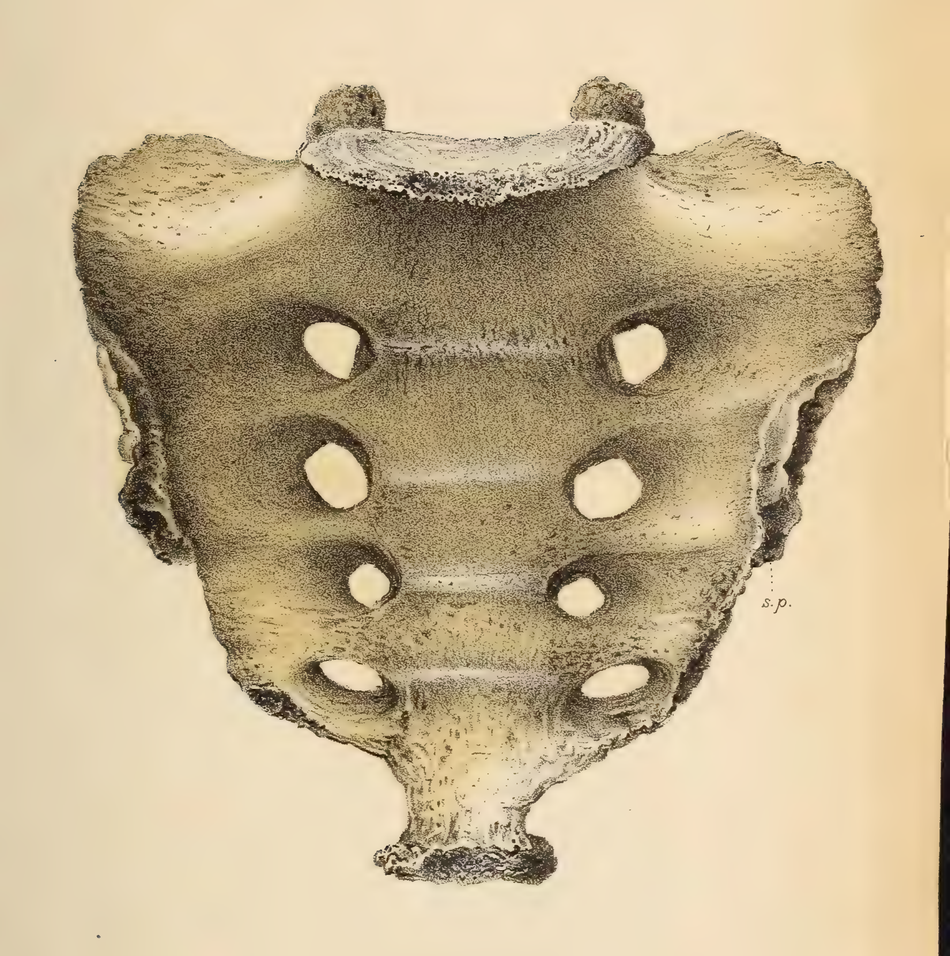
Lith. Emrik & Binger Haarlem.

Fig. 2.

sp

Fig. 1.

C.Miga ad nat.del. Lith. Emrik & Binger.



C. Miga ad nat. del.

Lith. Emrik & Binger

1470

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01305 3129